

2.1.4. Dynamik für große Abweichungen vom Fixpunkt (Class B Laser)

Reskalieren der Gleichungen

neue Zeit $s = \omega_R t$

neue Intensitätsabweichung $I = (P-1)(1 \pm \gamma)$

neue Inversion $\tilde{D} = 1 + \omega_R X$

Lösung der HA:

$$\alpha = (P-1)$$

$$\beta G = 1$$

$$\frac{\sigma \beta}{\alpha} (P-1) = 1$$

$$G^2 = \frac{1}{\gamma(P-1)} = \frac{1}{\omega_R^2}$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma} = (1 + \gamma) X$$

$$\dot{X} = -\gamma \left[-\sqrt{\frac{\gamma}{P-1}} \cdot X (P - (P-1)\gamma) \right]$$

liefert Dämpfung der Oszillation

$\omega^2 = (2k)^2 \omega_R^2$
 Dimension $\frac{1}{s}$ ohne Dim.

$$\gamma = \frac{1}{2kT}$$

klein für $\mu \ll 1$; $P-1$ fest

Fall $\mu \rightarrow 0$ (Grenzfall jetzt möglich!)

\Rightarrow ungestörtes Problem ($\mu=0$)

Leading order Problem:

Gleichungen sind konservativ!

$$\begin{cases} \dot{y} = (1+y)x & \text{(I)} \\ \dot{x} = -y & \text{(II)} \end{cases}$$

► Def.: konservativ

• Ein System $F(\underline{x}) = \dot{\underline{x}}$ ist konservativ

wenn es eine Funktion C gibt, so dass $\underline{F} \nabla_{\underline{x}} C = 0$.

Erhaltungsgröße von (I) und (II)

$$C = \frac{x^2}{2} + y - \ln(1+y)$$

$$\nabla C = \begin{pmatrix} x \\ 1 - \frac{1}{1+y} \end{pmatrix}$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} -y \\ (1+y)x \end{pmatrix}$$

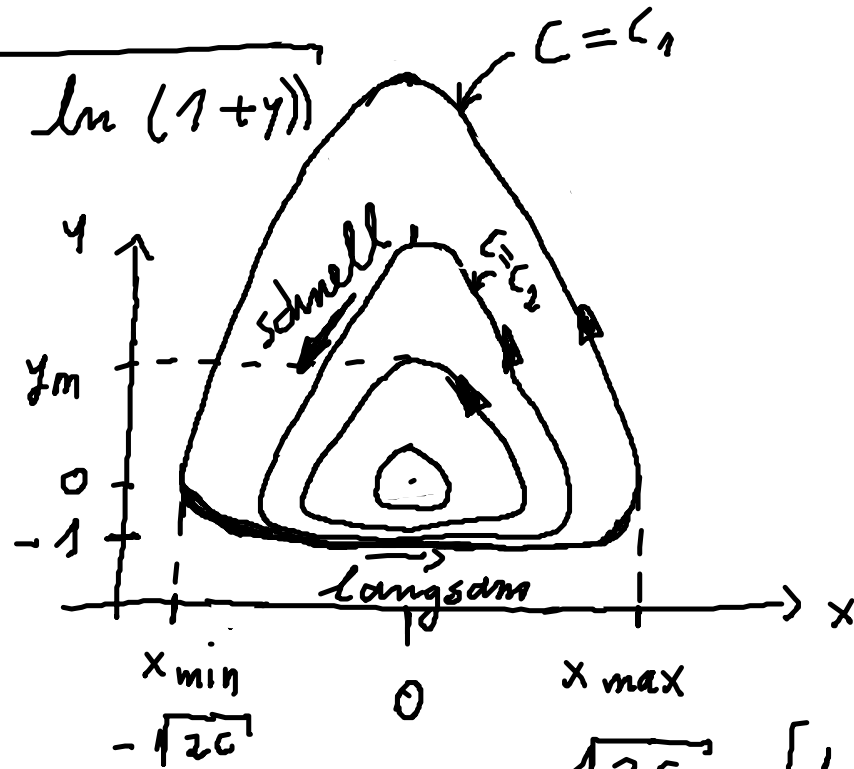
$\Rightarrow \nabla C \cdot \underline{F} = 0$
 \Rightarrow konservatives System

\rightarrow System ist ungedämpft

$$x(y) = \pm \sqrt{2(C - y + \ln(1+y))}$$



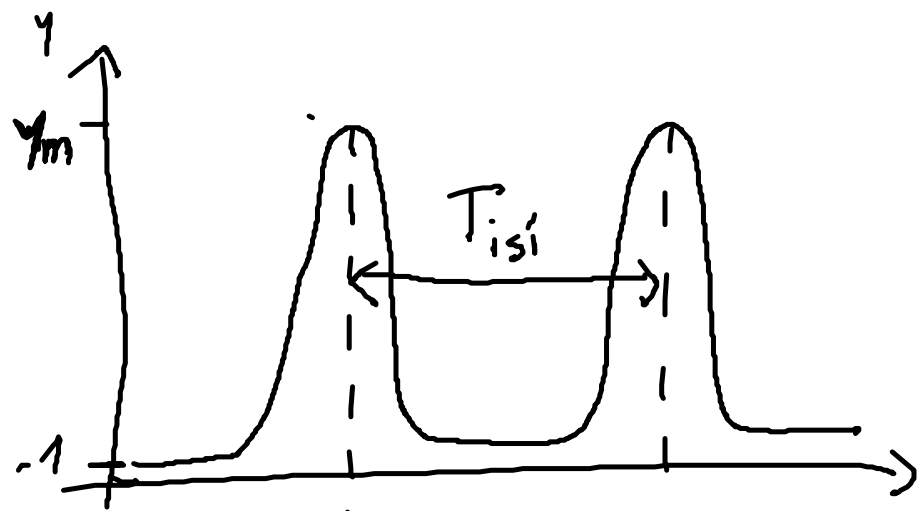
• Form der Trajektorien im Phasenraum bekannt!



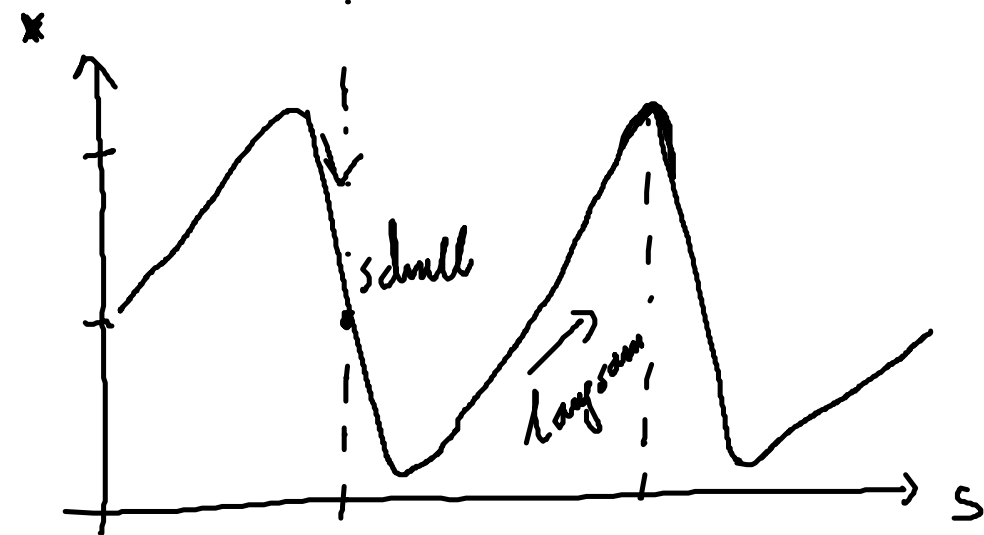
$\left[\begin{array}{l} \text{da } \ln(1+y) < y \\ \text{und } \ln(1+y) = y \\ \text{für } y = 0 \end{array} \right]$

- zu jedem C gibt es eine Trajektorie im Phasenraum
- C durch Anfangsbed. gegeben
- nichtlineare Schwingungen

Zeitentwicklung
 $y(s)$ [numerisch bestimmt]
 $x(s)$



$$y = -1 \Rightarrow I = 0$$
$$s = \omega_R t^{\text{neu}} = \omega_R z k t^{\text{alt}}$$



• Interpulse Intervall T_{isi}
zeit zwischen den Spikes
während $I \approx 0$ d.h. $y \approx -1$

ODL: $\dot{y} = (1 + y)x$
 $\dot{x} = -y$

$\rightarrow \dot{x} \approx 1$ wenn $y \approx -1$
 $\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx = \int_t^{t+T_{isi}} ds$

$$2\sqrt{2C} = T_{isi}$$

Periode hängt von C
 also AB ab

• Maximale Intensität von y

ist bei $y_m \approx C$ (wenn $x=0$), da $C = y - \ln(1+y)$
 (und C groß)

[$\ln(1+y) \ll y$ für $y \gg 1$]

\Rightarrow
$$y_m = \frac{T_{isi}^2}{8}$$

Periode und Intensität
 der Spikes sind korreliert!

dieses Strahlungsverhalten ist messbar!

Bem: Analytisch entspricht das ungedrökte Problem ($\gamma=0$)
einem Oszillator mit nichtlinearer Dämpfung

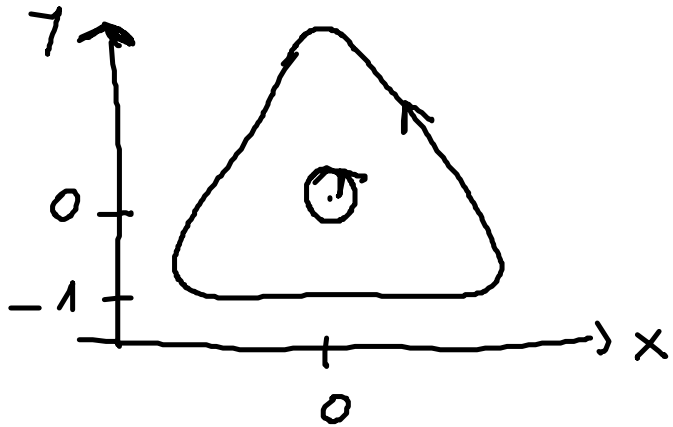
$$0 = \ddot{x} + x - \dot{x}x$$

Lösung: mit Potenzreihenansatz mit gedrehter Zeit

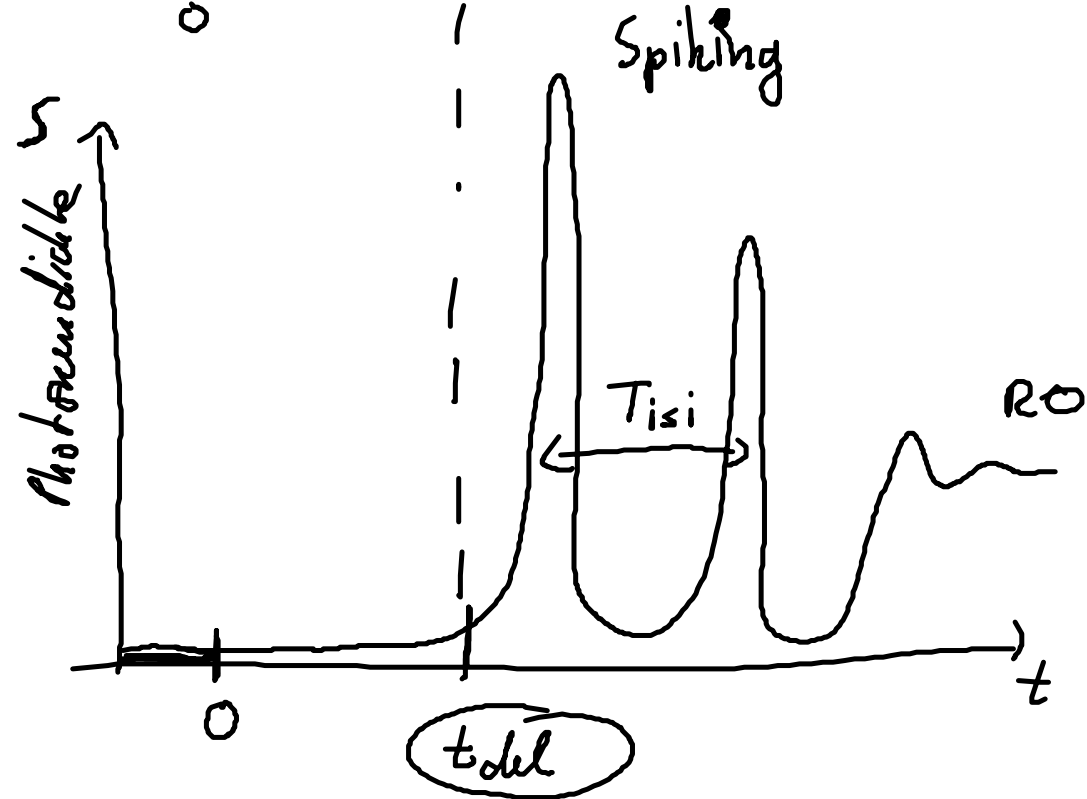
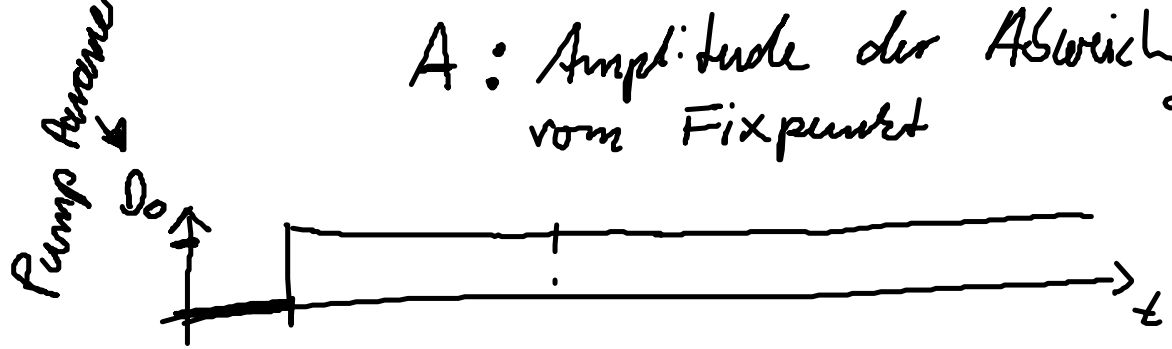
$$\tau = \left(1 - \frac{1}{6} A^2\right) \vartheta = \left(1 - \frac{1}{6} A^2\right) \cdot \underbrace{\omega_R \cdot 2\pi \cdot t}_{\omega \text{ aus 2.1.3.}}$$

$$x(\tau) = iA e^{i\tau} + \frac{1}{3} A^2 e^{2i\tau} + \text{c.c.} + O(A^3)$$

$$y(\tau) = A e^{i\tau} - \frac{2}{3} A^2 e^{2i\tau} + \text{c.c.} + O(A^3)$$



A : Amplitude der Abweichung vom Fixpunkt



① für kleine A ist die Schwingung harmonisch
 → Lösung stimmt mit der Lösung der linearen Stabilitätsanalyse überein.

② A groß: $T_{isi} > \frac{2\pi}{\omega_R}$

Letzte

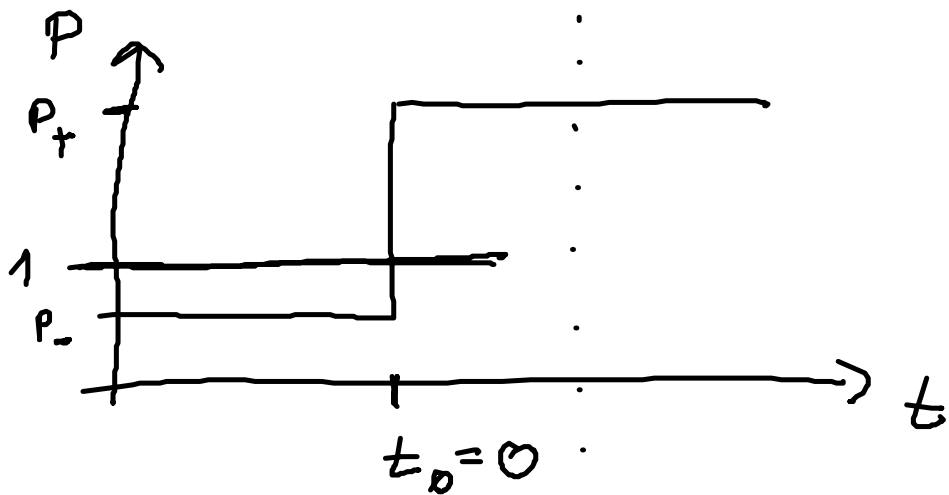
Frage: Wie lange braucht der Laser um Inversion zu erreichen.

2.1.5. Anschaltverzögerung

Turn-on Relay t_{del}

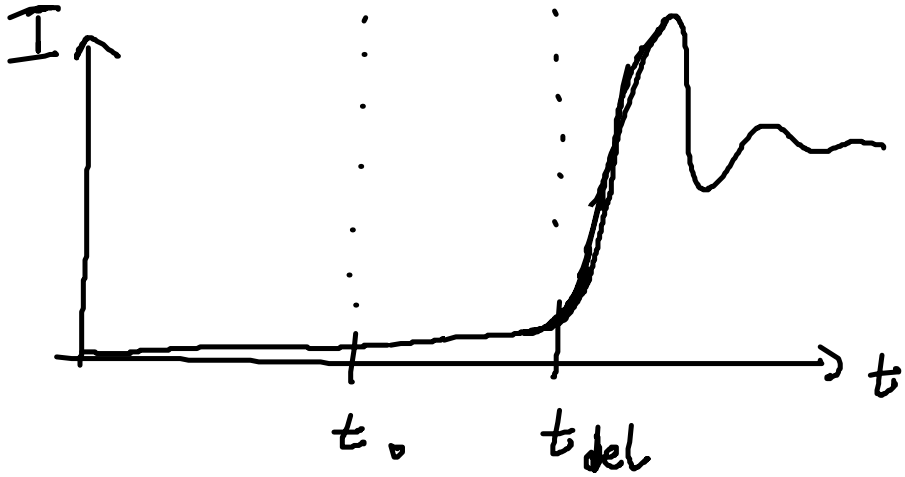
Frage: Wie groß ist t_{del} ?

mit lin. Stabilitätsanalyse nicht zu beantworten
da D weit weg vom Fixpunkt bei $t=0$.



[dimensionlose
Gleichungen
in I, \tilde{D}]

Laser wird bei t_0
eingeschaltet.



(γ kann entweder
groß [class A] oder
klein [class B] sein)

Ansatz: Intensität I sehr klein

$$\rightarrow \text{(III)} \quad \dot{I} = I (\tilde{D} - 1)$$

$$\text{(IV)} \quad \dot{\tilde{D}} = \gamma (P_+ - D) - \cancel{D I}$$

$$\text{AB: } I(0) = I_0 \ll 1$$

$$\tilde{D}(0) = P_-$$

Lösung von (IV)

$$\tilde{D} = (P_- - P_+) e^{-\gamma t} + P_+$$

$$t = t_{\text{neu}} = 2\kappa t_{\text{rel}}$$

Einsetzen in III

$$\dot{I} = I \left[(P_- - P_+) e^{-\gamma t} + P_+ - 1 \right]$$

Problem ist separierbar

Ansatz; $I = \bar{I}_0 e^{\frac{1}{\gamma} F(\gamma t)}$

$$I = \bar{I}_0 e^{\frac{1}{\gamma} \left[(P_+ - 1) \gamma t - \frac{1}{\gamma} (P_- - P_+) [e^{-\gamma t} - 1] \right]}$$

Fortsetzung folgt