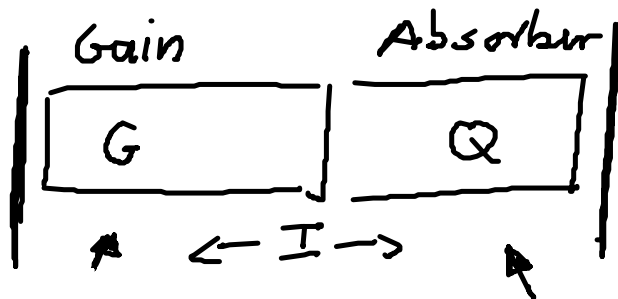


2.2.2. Passives Q-switching

Dynamik mit sättigbarem Absorber (Fortsetzung)

$$\alpha = \frac{W^{Abs} T_{Abs}}{W^G T}$$



Inversion
in Gain Section

Inversion
im Absorber
 Q negativ!

DGL-System (dimensionales)

$$\dot{G} = \gamma (P_G - G - G I)$$

$$\dot{Q} = \bar{\gamma} (P_{Abs} - Q - \alpha Q I)$$

$$\dot{I} = (G + Q - 1) I$$

► Stationäre Zustände des DGL Systems

$$\textcircled{1} \quad \begin{aligned} I &= 0 \\ G - P_G &= 0 \\ Q - P_{Abs} &= 0 \end{aligned}$$

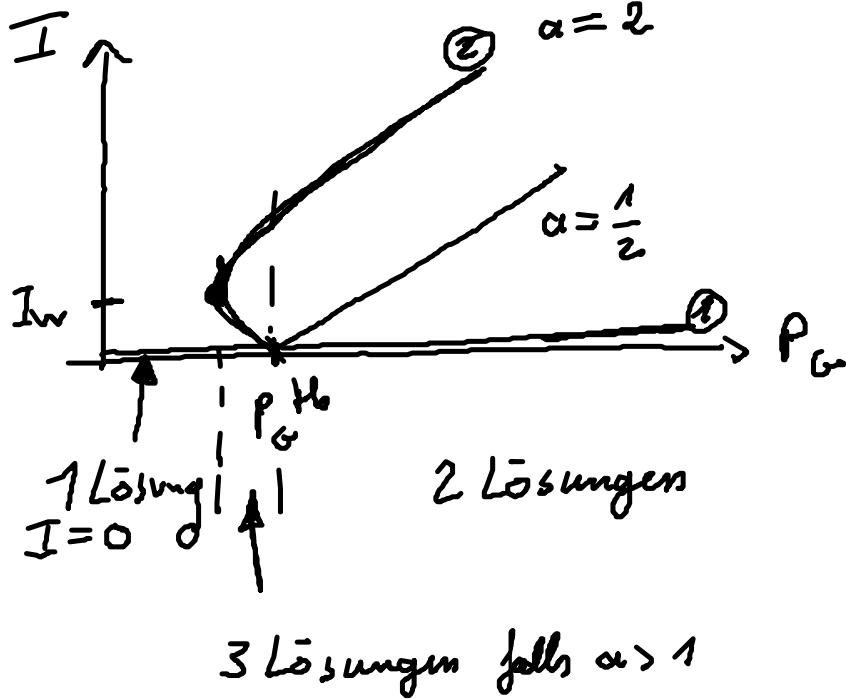
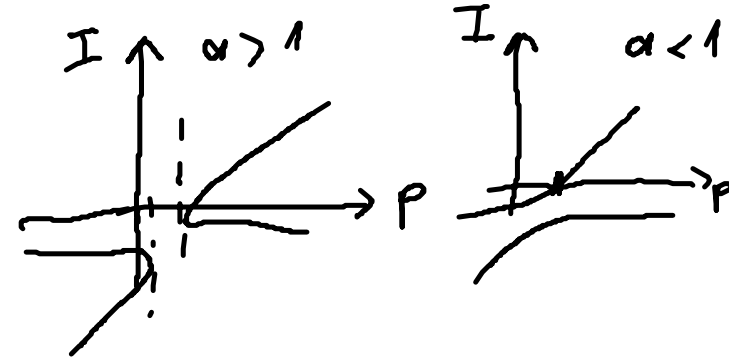
→ nicht leerer Zustand

$$\textcircled{2} \quad G + Q = 1$$

$$P_G = (1 + I) \left(1 - \frac{P_{Abs}}{1 + \alpha I} \right) \leftarrow \text{Bestimmungsgleichung für } I$$

$$G = \frac{P_G}{1 + I} \quad ; \quad Q = \frac{P_{Abs}}{1 + \alpha I}$$

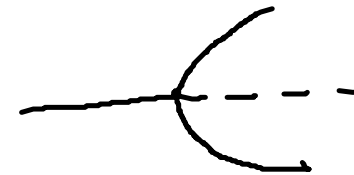
$$\dot{G} = \dot{Q} = \dot{I} = 0$$



Schwelle bei $I=0$

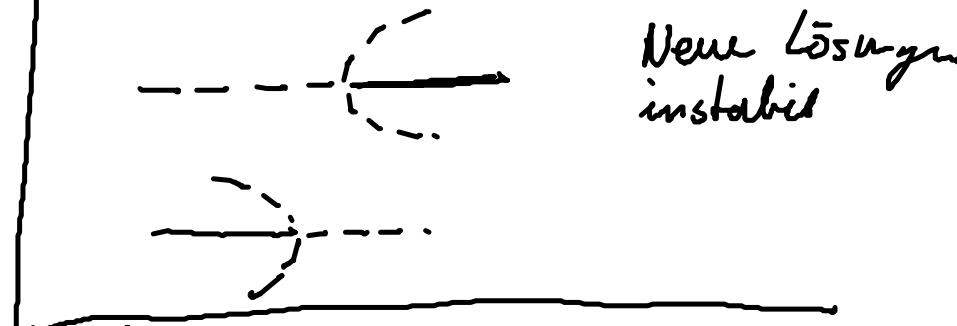
$$\rightarrow P_G^{th} = 1 - P_{Abs}$$

trans:
superkrit. Bifurkation:



Neue Lösungen
stabil

subkrit. Bifurkation:



2 Fälle für die Bifurkation an der Schwelle:

1) Superkritisch wenn $\frac{dI}{dP_G} > 0$ bei $P_G = P_G^{th}$ ($I=0$)

2) Subkritisch wenn $\frac{dI}{dP_G} < 0$ "

bei $I=0; P_G = P_G^{th}$:

> 0 für $a > \frac{1 - P_{Abs}}{-P_{Abs}}$

< 0 für $a < \frac{P_{Abs} - 1}{P_{Abs}}$

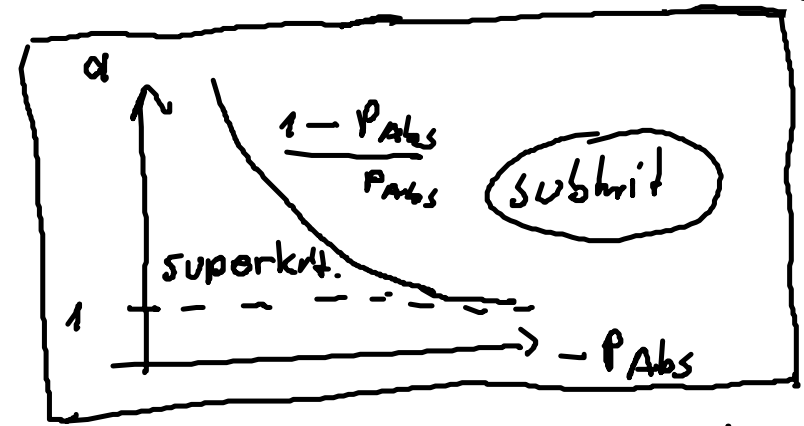
betrachte

$$\frac{dP_G}{dI} = 1 - \frac{P_{Abs}}{1+dI} + \frac{(1+I) P_{Abs} \cdot a}{(1+dI)^2}$$

$\frac{dP_G}{dI} = 0$ für I_w

$$\Rightarrow a^2 I_w^2 + 2a I_w + 1 - P_{Abs} + a P_{Abs} = 0$$

$$I_w = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1 - 1 + P_{Abs} - a P_{Abs}}{a^2}}$$



$\Rightarrow a < 1 \rightarrow \frac{dP_G}{dI} \neq 0$ Steady state Lösungen für I immer superkritisch bei $P_G = P_G^{th}$

$a > 1$ & $a > \frac{1 - P_{Abs}}{-P_{Abs}} \Rightarrow$ • 2 steady state Lösungen
möglich (zusätzlich zu $I=0$
für $P_G < P_G^{th}$)

• Schwelle ist subkritisch

► Stabilität der stationären Lösungen ?

► Reduktion auf 2 Variablen

(Untersuchung im Prinzip
auch mit vollem System
möglich, Matrix aber komplex)

Argumentation: Absorberdynamik viel schneller als Gasdynamik

$$\rightarrow \bar{y}_1 \gg y_1$$

$\rightarrow Q$ ändert sich schnell bis steady state erreicht ist

\rightarrow nach kurzer Zeit gilt

$$Q \approx \frac{P_{Abs}}{1 + aI}$$

$$\left(\begin{array}{c} \dot{Q} = \bar{y}_1 (P_{Abs} - Q - aQI) \end{array} \right)$$

Reduziertes 2 Variablen DGL System

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{I} = \left(-1 + \frac{P_{Abs}}{1 + \alpha I} + G \right) I \\ \dot{G} = \gamma [P_G - G(1 + I)] \end{cases}$$

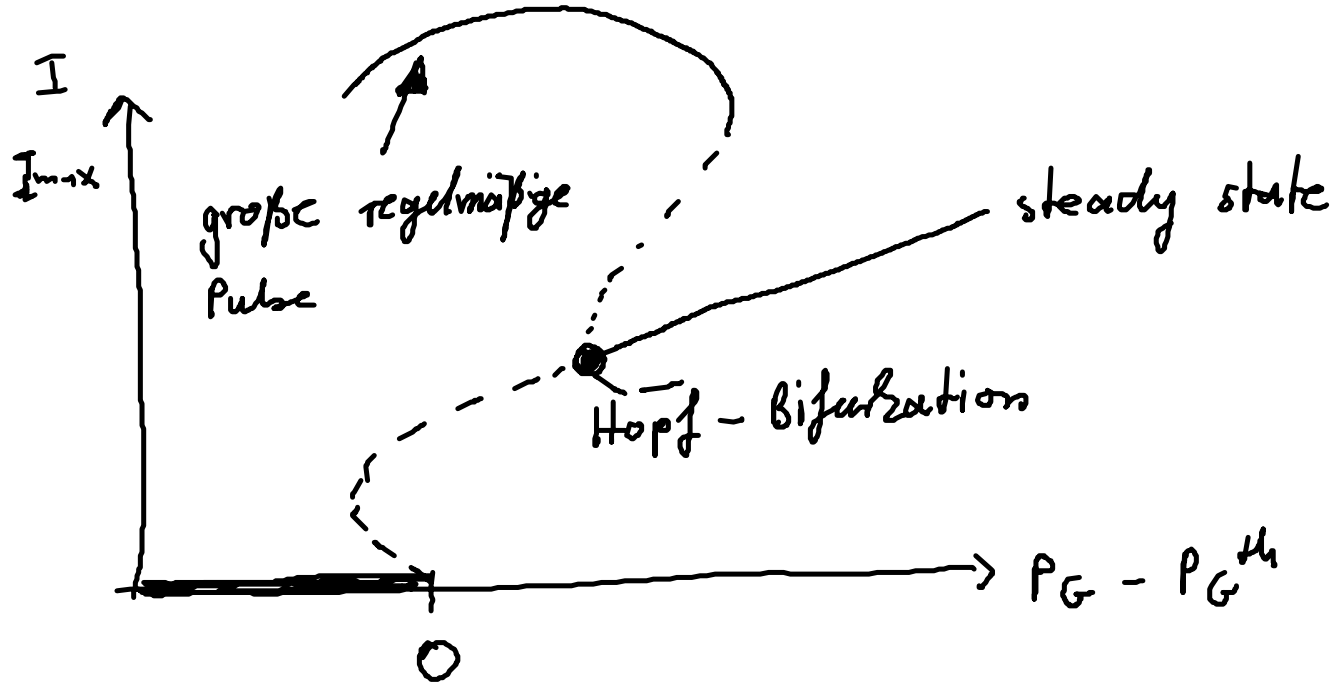
Adiabatisches Eliminieren!
(Versklavungsprinzip
von Haken)

"äquivalent zu Laser mit
veränderlicher Verlustrate der
Photonen

Lineare Stabilität:

Jakobi-Matrix am Fixpunkt auswerten + EW bestimmen

$$DF = \begin{pmatrix} -\frac{P_G \alpha I}{(1 + \alpha I)^2} & I \\ -\gamma G & -\gamma(1 + I) \end{pmatrix} \quad \textcircled{2}$$



Hopf - Bifurkation

tritt auf wenn

$$\lambda = \pm i\omega$$

(Realteil Null
+ Eigenwert komplex)

eingesetzt in EW - Gleichung

$$\lambda^2 + \text{tr} A \lambda + \det A = 0$$

bedeutet die Hopf - Bedingung :

$$\begin{cases} \text{tr} A = 0 \\ \det A > 0 \end{cases}$$

$$\text{tr} A = \frac{-P_{Abs} a \bar{I}}{(1+a\bar{I})^2} - \gamma(1+\bar{I})$$

$$\det A = \gamma \bar{I} \left[\frac{P_{Abs} (1+\bar{I}) a}{(1+a\bar{I})^2} + G \right]$$

$$\rightarrow \det A = \gamma \bar{I} \left(\frac{dP_G}{d\bar{I}} \right) \text{ Vorzeichen bekannt}$$

\rightarrow Ast mit negativem Anstieg
ist instabil

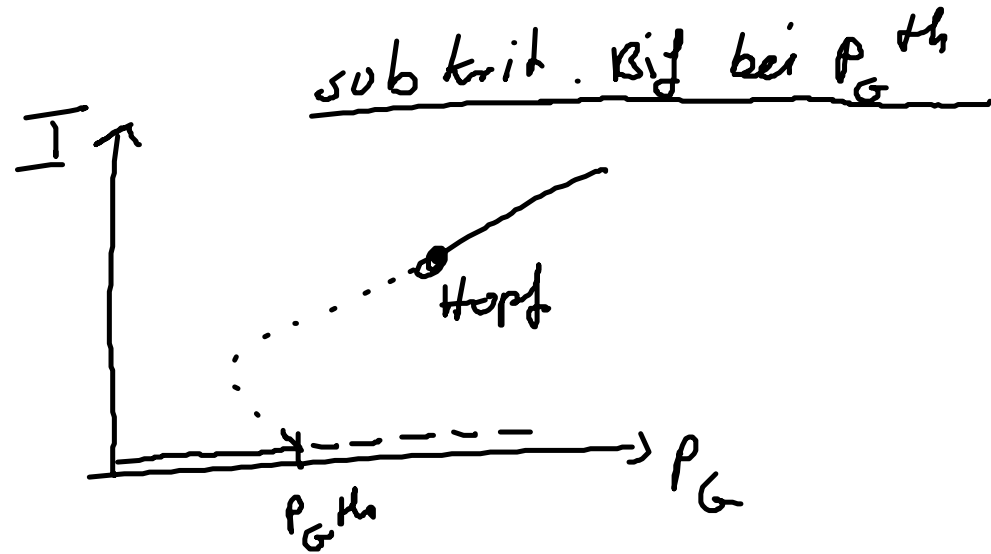
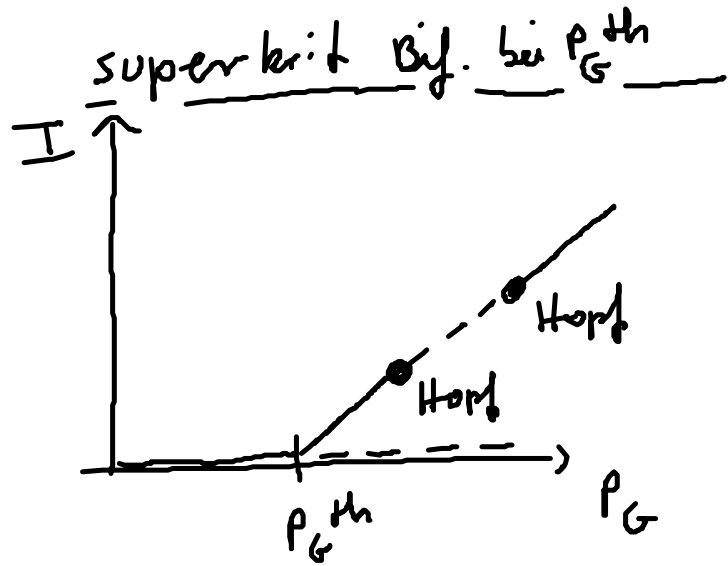
Bedingung $\text{tr} A = 0$ liefert 2 Lösungen für Hopf - Punkt

$$1) \bar{I} \text{ groß} \rightarrow \frac{P_{Abs} a \bar{I}_H}{a^2 \bar{I}^2} - \gamma \bar{I}_H = 0 \Rightarrow \bar{I}_H \approx \sqrt{\frac{P_{Abs}}{\gamma a}}$$

$$2) \bar{I} \text{ klein} \rightarrow \bar{I}_H \approx \frac{\gamma}{-a P_{Abs}}$$

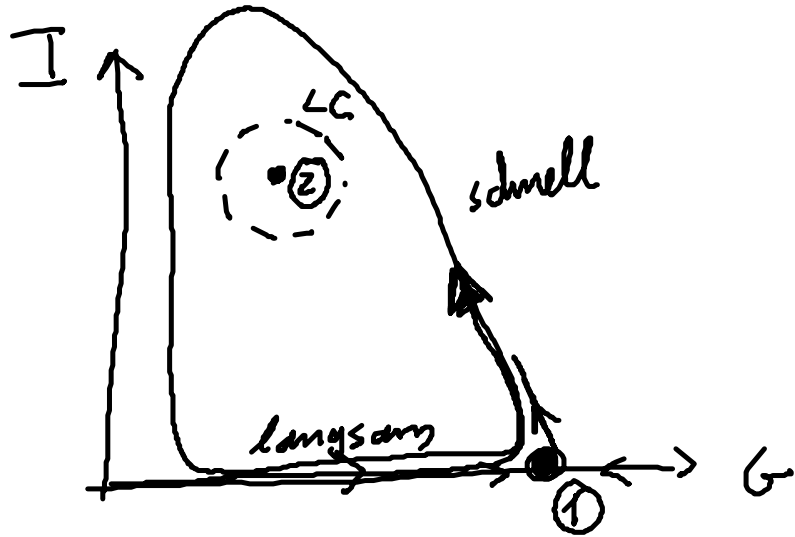
$\det A > 0$ ist für 1) & 2) erfüllt

aber 1) tritt nur auf für superkrit. Fall



Problem: durch Hopf - Bifurkation entstehen Oszillationen
mit kleiner Amplitude \rightarrow erklärt nicht Q-switching
Pulsationen

Phasenportrait der Pulsationen



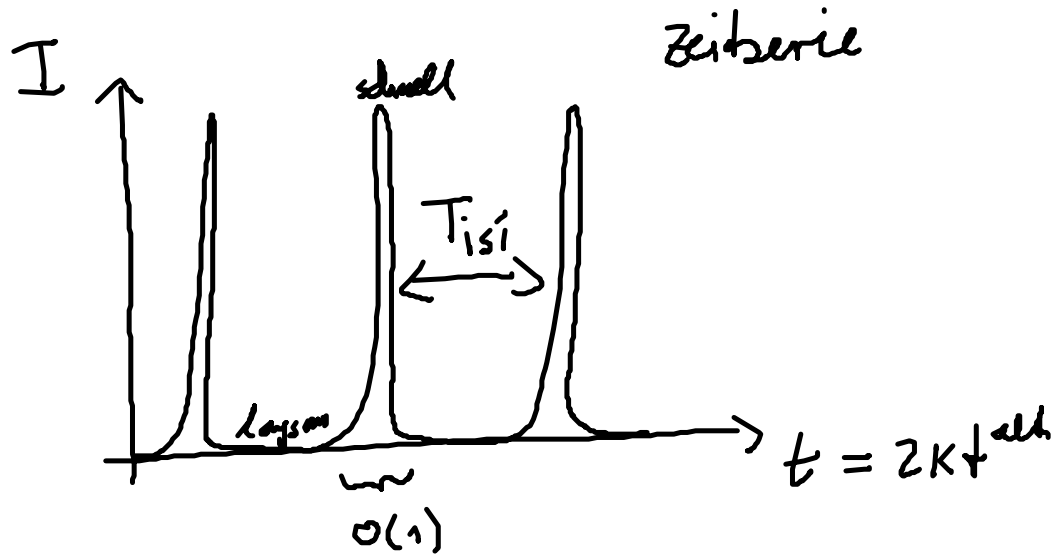
pulserende Lösungen

Numerik

Länge der Pulse $O(1)$

Intensität der Pulse $\sim \frac{1}{\gamma}$

$T_{isi} \sim \frac{1}{\gamma}$



$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2kT_{abs}}$$

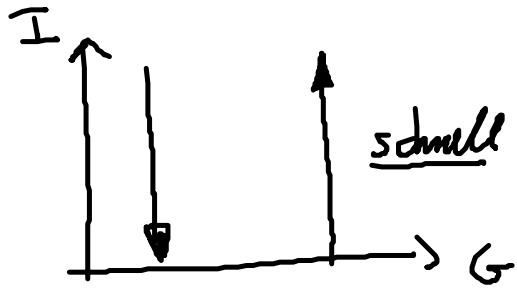
$$\gamma = \frac{1}{2kT}$$

Trajektorie im Phasenraum beschreibbar ähnlich dem Spiking + Turn-on Delay

Grenzfall kleiner γ : homokliner Orbit kann konstruiert werden

1) Setze $y_1 = 0 \rightarrow$ langsame Zeit eingefroren

DGL $\dot{G} = 0$
 $\dot{I} = (G + Q - 1)I$



• keine Bewegung auf langsamen Teil (G ist konstant)

2) Wechsel auf langsame Zeit

$$\tau = y_1 t$$

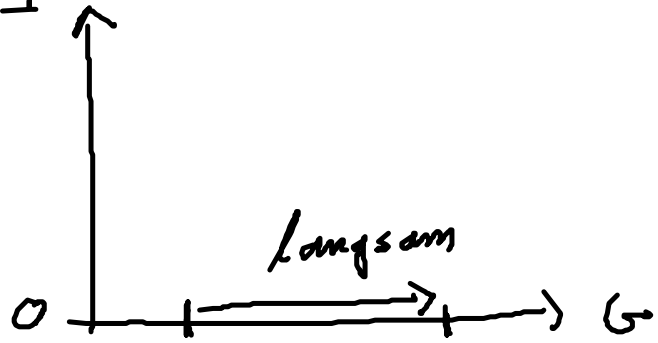
DGL $\rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} G = P_G - G - GI$

$$y_1 \frac{\partial I}{\partial \tau} = (G + Q - 1)I$$

Suche Lösungen bei denen $I = 0$

T

$$\Rightarrow (I = 0)$$



$$G' = P_G - G$$

→ G entwickelt sich auf P_G
zu, Zeitskala $\frac{1}{\gamma}$

3) Idee der singulären Störungstheorie: Lösungszweige
verschiedener Grenzfälle zusammenfügen
(matching conditions)

Transformation auf OGL in $I^{inv} = \frac{1}{I}$

und Zeit

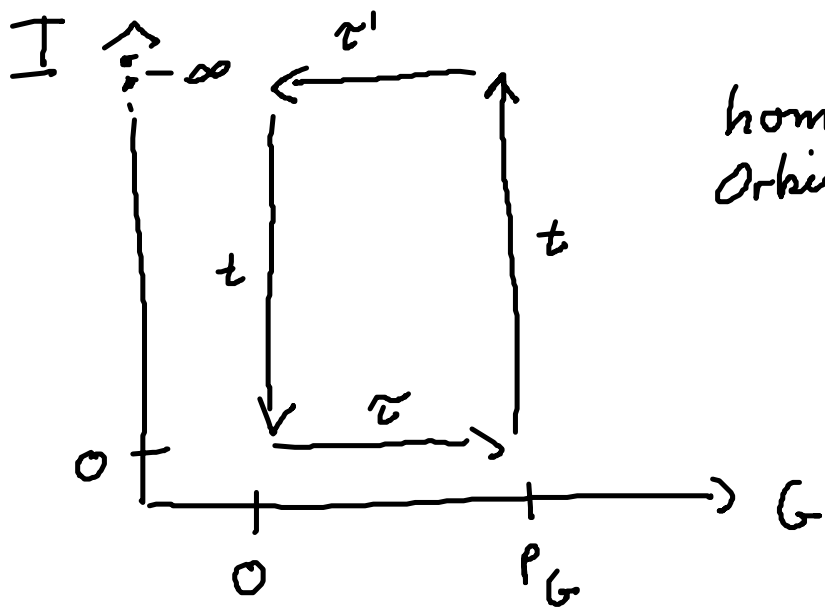
$$z' = \frac{\gamma}{I^{inv}} t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial z'} = P_G I^{inv} - G I^{inv} - G$$

$$\gamma \frac{\partial}{\partial z'} I^{inv} = (-G - Q + 1) (I^{inv})^2$$

Suche Lösung
bei der $I^{inv} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial z'} = -G$$



homokliner
Orbit

G sinkt schnell
exponentiell auf 0

\Rightarrow Zeitskala auf langsamer
Mannigfaltigkeit ist \propto
 \rightarrow Zeit zwischen den Pulsen $\sim \frac{1}{\delta}$

für mehr Details
siehe Buch „Laser Dynamics“
von T. Erneux