3. Semiklassischen Lasergleichungen

<u>bisher</u>: - heuristisch motivierte Gleichungen
→ nun Herleitung

- keine Phase der Lichtmode
→ Effekte wie Modenkopplung und Rückkopplung können dann beschrieben werden

<u>Jetzt</u>: • Maxwell-Gleichungen [Licht klassisch]

• Schrödingergleichung für Atome [WW Licht-Materie]

3.1. Wellengleichung für das elektrische Feld

Maxwellgl:

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$
$$\mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j} + \dot{\underline{D}}$$
$$\mathrm{div}\,\underline{E} = 0$$
$$\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$$

$\underline{E}$ elektr. Feld
$\underline{D}$ dielektr. Versch.
$\underline{H}$ Magnetfeld
$\underline{B}$ magn. Induktion

keine Kopplung an Ladungen
→ das elektr. Feld ist transversal

Materialgleichungen

a) $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$

Makroskopische Polarisation des Lasermediums
(klass. Oszillatormodell mit $\underline{P} \sim \underline{E}$
kann Lasertätigkeit nicht erklären)

b) $\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$ nichtmagnetisches Material

c) Stromdichte $\underline{j} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Leitfähigkeit}}}{\sigma} \underline{E}$ (Ohmsches Gesetz)

$\Rightarrow$ Herleitung Wellengleichung: [aus rot(rot E)]

$$\Delta \underline{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{E}} - \mu_0 \sigma \dot{\underline{E}} = \mu_0 \ddot{\underline{P}}$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

- für $\ddot{\underline{P}} = 0$ ist dies die Telegrafengleichung für Wellenausbreitung im leitenden Medium
- $\ddot{\underline{P}}$ stellt einen Quellterm für das elektrische Feld

Elektrisches Feld im Resonator

Entwicklung nach Moden λ: $\underline{E}(x,t) = \sum_\lambda E_\lambda(t)\, u_\lambda(\underline{x})\, \underline{e}_\lambda$

Polarisation der Mode

Separation der Variablen $\Longrightarrow$ die $u_\lambda(x)$ sind Lösungen von

$$\Delta u_\lambda(\underline{x})\underline{e}_\lambda + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} u_\lambda(\underline{x})\underline{e}_\lambda = 0$$

[mit geeigneten RB. z.B. period. -> $u_\lambda(x) = e^{ik_\lambda x}$]

es gilt Orthonormalität:

$$\int \underline{u}_\lambda(x)\, \underline{u}_{\lambda'}(\underline{x})\, d\underline{x} = \delta_{\lambda\lambda'}$$

Modenansatz in Wellengleichung ergibt DGL in der Zeit:

$$\sum_\lambda \left(-\omega_\lambda^2 E_\lambda - \ddot{E}_\lambda - \sigma \frac{1}{\varepsilon_0} E_\lambda\right) \underline{u}_\lambda(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \underline{\ddot{P}}$$

$\int d\underline{x}\ \underline{u}_{\lambda'}(\underline{x}) \ldots \Rightarrow$

$$\boxed{\omega_{\lambda'}^2 E_{\lambda'} + \ddot{E}_{\lambda'} + \sum_{\lambda} \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma_{\lambda'\lambda} \dot{E}_\lambda = -\frac{1}{\varepsilon_0} \ddot{P}_{\lambda'}} \qquad (I)$$

- $P_\lambda(t) := \int \underline{u}_\lambda(x)\, \underline{P}(\underline{x}, t)\, d\underline{x}$
- mit $\sigma_{\lambda'\lambda} = \int u_{\lambda'}\, \sigma\, u_\lambda\, d\underline{x}$
  für räumlich homogene Leitfähigkeit $\sigma_{\lambda'\lambda} = \sigma\, \delta_{\lambda'\lambda}$

3.2. Materiegleichungen des Lasers

– aktives Medium (hier 2 Niveau System) beschrieben durch

Schrödingergleichung $\quad i\hbar \dot{\psi}(\underline{r}, t) = H\, \psi(\underline{r}, t)$

$\uparrow$

Elektronenwellenfkt des Atoms

Hamiltonian: $H = H_0 + H_W$

WW mit Licht

ungestörter Anteil der Elektronenbewegung im Atom

E_2

$$H_0 \varphi_j = E_j \varphi_j \qquad (j = 1, 2)$$

E_1

(Annahme: Eigenwertproblem von H_0 gelöst)

Eigenwerte

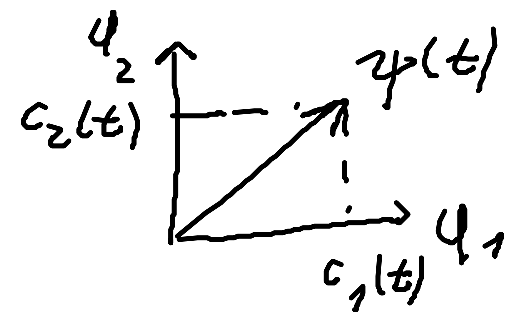
Eigenzustände

$$H_W = \underbrace{e\,\underline{r}}_{\text{Operator des elektrischen Dipolmomentes}} \cdot \underline{E}(t)$$

Störoperator WW mit elektrischem Feld in Dipolnäherung

Entwicklung der Wellenfunktion nach ONS (φ_1, φ_2)

$$\psi(\underline{r}, t) = c_1(t)\,\varphi_1(\underline{r})\,e^{-i/\hbar\, E_1 t} + c_2(t)\,\varphi_2(\underline{r})\,e^{-i/\hbar\, E_2 t}$$



$\Rightarrow$ Einsetzen in Schrödingergleichung

$$i\hbar\left[\dot c_1 \varphi_1 e^{-i/\hbar\, E_1 t} + \dot c_2 \varphi_2 e^{-i/\hbar\, E_2 t}\right] + \underline{c_1 E_1 \varphi_1 e^{-i/\hbar\, E_1 t}} + \underline{c_2 E_2 \varphi_2 e^{-i/\hbar\, E_2 t}}$$

$$= \underbrace{\underline{H_0 c_1 \varphi_1 e^{-i/\hbar\, E_1 t}} + \underline{H_0 c_2 \varphi_2 e^{-i/\hbar\, E_2 t}}}_{\text{EW gleichung von } H_0} + c_1 H_W \varphi_1 e^{-i/\hbar\, E_1 t} + c_2 H_W \varphi_2 e^{-i/\hbar\, E_2 t}$$

$\int dr\, \varphi_j^* e^{i/\hbar E_j t} \dots$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{c}_1 &= \frac{1}{i\hbar} c_2 \underline{E}(t) \underline{\mu}_{12} e^{-i\bar{\omega} t} \\ \dot{c}_2 &= \frac{1}{i\hbar} c_1 \underline{E}(t) \underline{\mu}_{21} e^{i\bar{\omega} t} \end{aligned}} \quad *_1$$

mit atomarer Übergangsfrequ.

$$\bar{\omega} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

Def.: $\underline{\mu}_{jk} := \int \varphi_j^* e \underline{r} \varphi_k \, d\underline{r}$ Matrixelement des Dipoloperators (statisch!)

es gilt $\underline{\mu}_{11} = \underline{\mu}_{22} = 0$

$\underline{\mu}_{21} = \underline{\mu}_{12}^*$

Ziel: Berechnung des dynamischen el. Dipolmomentes eines Atomes (mikroskopische Polarisation)

$$\tilde{\underline{p}}(t) := \langle e\underline{r} \rangle = \int \psi^* e\underline{r}\, \psi\, d\underline{r}$$

$$= c_1^* c_2 \underline{\mu}_{12} e^{-i\bar{\omega} t} + c_2^* c_1 \underline{\mu}_{21} e^{i\bar{\omega} t}$$

$$= \tilde{\underline{p}}^{(+)} + \tilde{\underline{p}}^{(-)}$$

$$= -p(t)\underline{\mu}_{12} - p^*(t)\underline{\mu}_{12}^*$$

mit $\quad p(t) := c_1^*(t)\, c_2(t)\, e^{-i\bar{\omega} t}$

dimensionsloses Dipolmoment

<u>Bewegungsgleichung für $p(t)$</u>

$$\dot{p} = -i\bar{\omega} p + c_1^* \dot{c}_2 e^{-i\bar{\omega} t} + \dot{c}_1^* c_2 e^{-i\bar{\omega} t}$$

Schrödinger-gleichung

$$\overset{(*_1)}{\Rightarrow} = -i\bar{\omega}\rho + \frac{1}{i\hbar}|c_1|^2 \underline{E}(t)\,\underline{\mu}_{21}\, e^{i\bar{\omega}t - i\bar{\omega}t}$$

$$- \frac{1}{i\hbar}|c_2|^2 \underline{E}(t)\,\underline{\mu}_{12}^{*}\, e^{i\bar{\omega}t - i\bar{\omega}t}$$

$$\boxed{\dot{\rho} = \underbrace{-i\bar{\omega}\rho}_{\text{Oszillation}} - \frac{1}{i\hbar}\underline{E}(t)\,\underline{\mu}_{21}\underbrace{\left[|c_2|^2 - |c_1|^2\right]}_{\text{Inversion eines Atoms}}} \qquad (\text{II})$$

WW mit Licht

$|c_1|^2$ Besetzungswahrsch. für E_1

- Gleichung für $\dot{\rho}$ koppelt an die Inversion $d = |c_2|^2 - |c_1|^2$
- Bewegungsgleichung für d lässt sich analog mit $(*_1)$ aufstellen

$$\dot{d} = \frac{d}{dt}\left(|c_2|^2 - |c_1|^2\right) = c_2^{*}\dot{c}_2 + \dot{c}_2^{*}c_2 - c_1^{*}\dot{c}_1 - \dot{c}_1^{*}c_1$$

$$\boxed{\dot{d} = \frac{2}{i\hbar}\, \underline{E}(t) \left(\underline{\mu}_{12}^{*}\, p^{*} - \underline{\mu}_{12}\, p \right)} \quad (\mathrm{III})$$

Gleichung (I) – (III) beschreiben die semiklassische WW von Licht mit einem 2-Niveau system, die zu induzierter Emission führen kann (Dämpfung und Pumpproz. fehlen noch).

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\underline{E} \arrow[r, bend right=40, "(\mathrm{II})"'] \arrow[rr, bend right=60, "(\mathrm{III})"'] & p \arrow[l, "(\mathrm{I})"'] \arrow[r, leftrightarrow, "(\mathrm{II}{,}\mathrm{III})"] & d
\end{tikzcd}$$