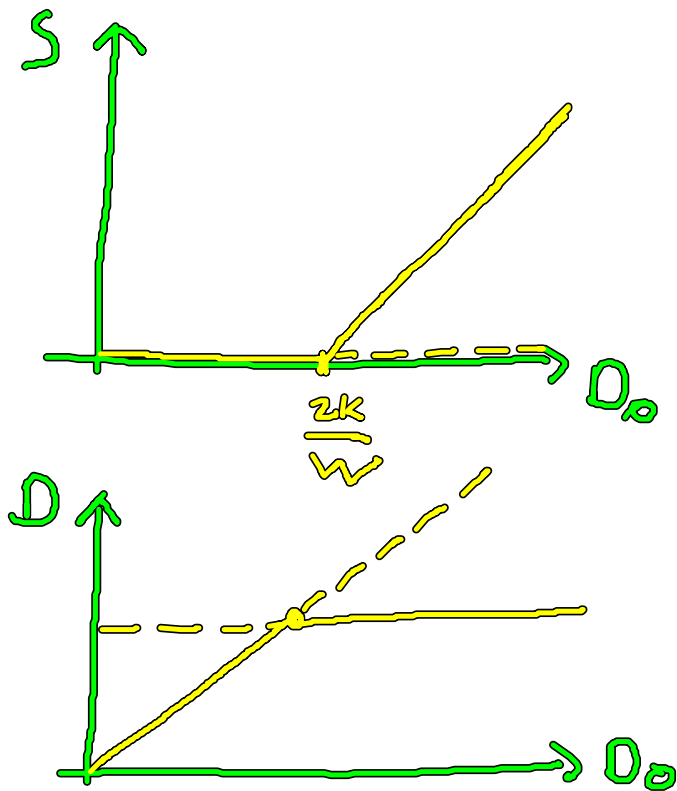


Stationäre Lösungen und Stabilität der Laser Bilanzgleichungen



Photonendichte S ,
 Photonanzahl $z = S \cdot V$
 \uparrow
 Volumen

$$\frac{dS}{dt} = \omega_0 S - z k S$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{D_0 - D}{T} - z \omega_0 S V$$

Inversion D

ohne spontan.
Emission

- An der Laserschwelle $D_0 = \frac{z k}{\omega}$ verzweigt sich
 also die stationäre Lösung, und die Stabilität wechselt

Bifurkationen!

- kann nur in nichtlinearen Systemen auftreten
- an der Laserschwelle ändert sich qualitativ das Verhalten

Nichtgleichgewichts-Phasenübergang



- fern vom therm. GG.

(GG gegeben durch Boltzmanns

Verteilung

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{(E_2 - E_1)}{kT}} < 1$$

$$D = N_2 - N_1 < 0$$

- Der Ordnungsparameter S ändert sich stetig an der Schwelle aber nicht diff. bar

\Rightarrow Phasenübergang 2. Ordnung

2.1.2. stationäre Lösungen mit spontaner Emission

• Unterhalb der Schwelle: stimulierte Emission kann gegenüber spont. Emission vernachlässigt werden

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dD}{dt} = \frac{D_0 - D}{T} - 2WDS \cdot V - W(N+D) \\ \frac{dS}{dt} = WDS - 2RS + \frac{1}{2} \frac{W}{V} (N+D) \end{array} \right]$$

$\dot{D} = 0$
für $S \approx 0$

$$D_0 - D \approx TW(N+D)$$

$$D \approx \frac{D_0 - TWN}{1} < D_0$$

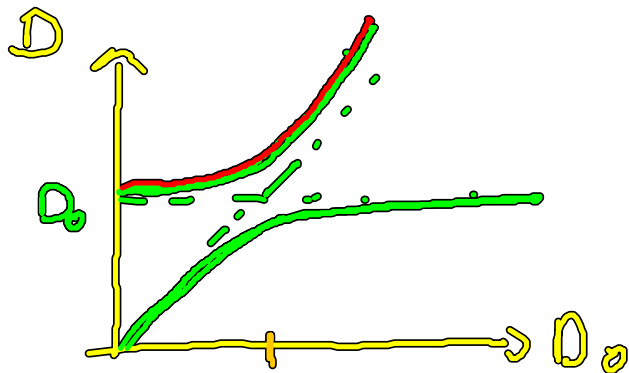
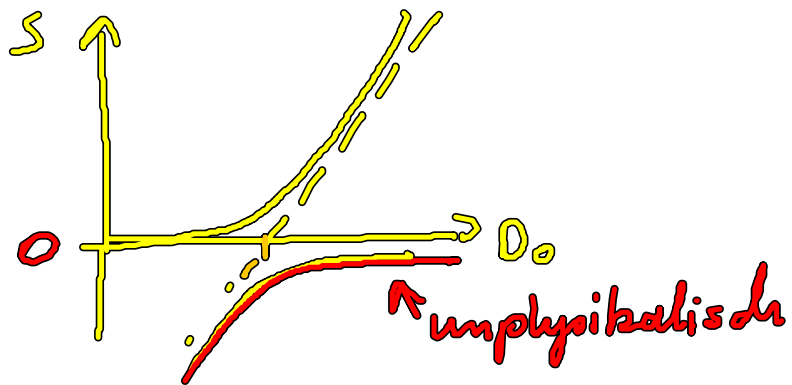
$$1 + Tw$$

$$\dot{S} = 0$$

für $S \approx 0 \rightarrow S \approx \frac{\frac{w}{zV} (N + D_0)}{zk - wD} \approx \frac{\frac{w}{V} (N + D_0)}{4k(1 + Tw) - 2w(D_0 - TwN)}$

wächst mit D_0

grafische Veranschaulichung der
Lösungen von $\dot{S} = 0$ & $\dot{D} = 0$

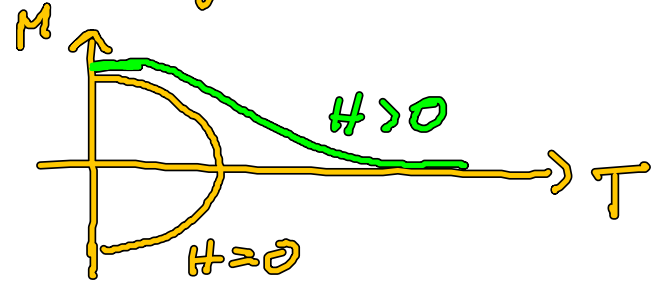


• es existiert für alle D_0
ein eindeutiger, stabiler
stationärer Zustand

ZK
W

- Der Phasenübergang 2. Ordnung wird durch die spontane Emission zerstört

(vgl. die Wirkung eines Magnetfeldes auf Ferromagneten)



2.1.3, Relaxationsoszillationen

(Stabilität des zweiten Fixpunktes $S \neq 0$)

• Spontane Emission vernachlässigt (klein wenn Laser läuft)

• oberhalb der Schwelle $D_0 > \frac{2k}{\omega}$

$$2R = \Gamma_{ph}^{-1} \uparrow \text{Photonenlebensdauer}$$

Jakobi-Matrix am Fixpunkt (ii) $\left\{ \begin{array}{l} D^* = \frac{2k}{\omega} \\ S^* = \frac{D_0 \omega - 2k}{4kT \cdot V} \end{array} \right.$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T} & -2\omega S^* \cdot V \\ \omega S^* & -2\omega D^* \cdot V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{P}{T} & -4k \cdot V \\ \frac{2k(LP-1)}{4kT \cdot V} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix}$$

A

effektiver
Pump parameter $P = \frac{W}{2k} D_0$

Charaktergleichung: $\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0$

$$\operatorname{tr} A = -\frac{P}{T} < 0$$

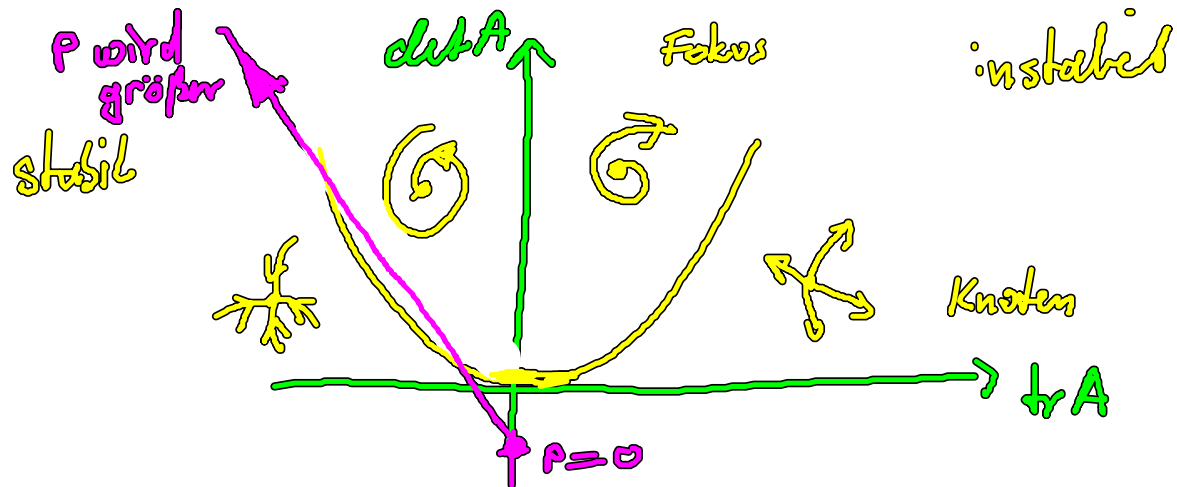
$$\det A = \frac{2k(P-1)}{T} > 0$$

} für $P > 1$

Bem: $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$$

\Rightarrow Stabilität
 \rightarrow Fixpunkt ist stabil



• 2 Fälle für Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

(i) EW imaginär

(ii) EW reell

(i) $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A < 0$, $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$

$$\lambda_{1,2} = -\Gamma \pm i\omega$$

komplex konjugiert

$$-\Gamma = \operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$$

$$\text{mit } \Gamma = -\frac{\operatorname{tr} A}{2} = \frac{\rho}{2T}$$

Dämpfungskonstante

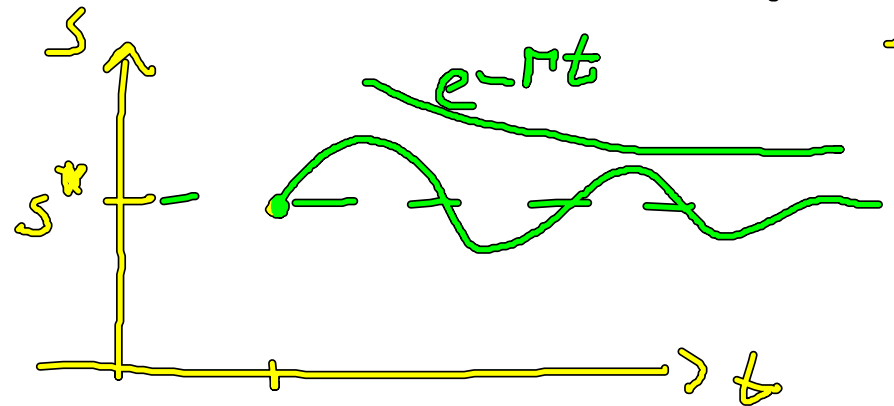
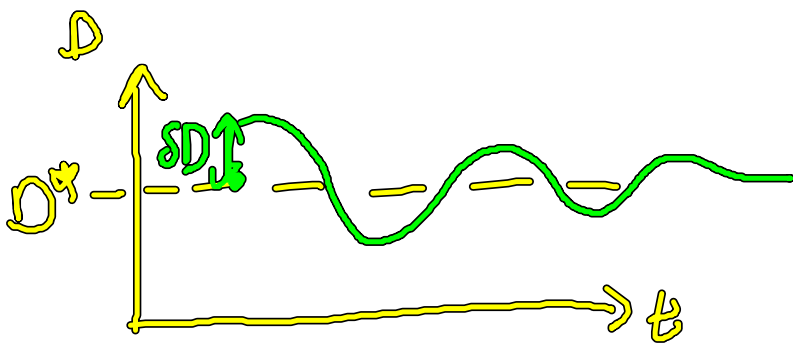
$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta k}{T} (\rho - 1) - \frac{\rho^2}{T^2}}$$

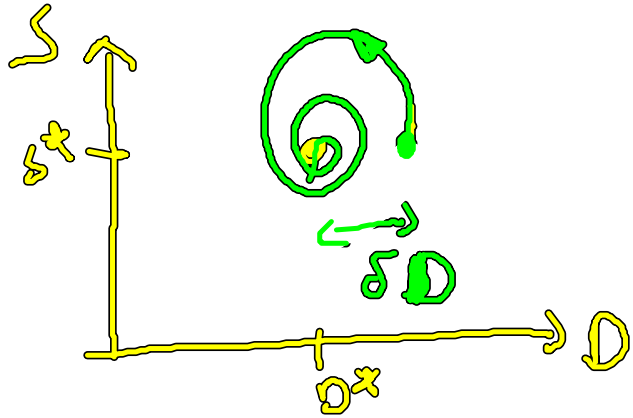
Oszillations-
frequenz

allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} = c_1 \cdot \eta_1 \cdot e^{(-\Gamma + i\omega)t} + c_2 \cdot \eta_2 \cdot e^{(-\Gamma - i\omega)t}$$

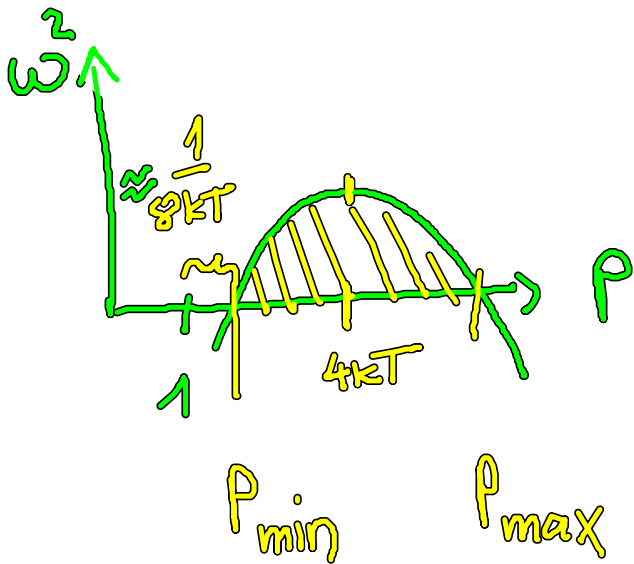
gedämpfte Oszillationen: Relaxationsoszillationen (RO)





← Phasenraum

- stabiler Fokus (Strudelpunkt)
~ Trajektorien sind Spiralen



$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8k}{T} (P-1) - \frac{P^2}{T^2}}$$

- an der Schwelle treten keine RO auf sondern erst für $P > \frac{1}{8kT}$

• Bereich der RO ist begrenzt durch P_{\min} und P_{\max}

• Notwendige Voraussetzung

$$2kT > 1$$

$$\frac{T}{\tau_{ph}} > 1$$

"Elektronen müssen länger
als Photonen in der Kavität"

• $2kT \gg 1$

Zeitskalentrennung
je größer $2kT$ desto ausgeprägter
sind die RO

Zeitskalenparameter $\gamma = \frac{\tau_{ph}}{T} = (2kT)^{-1}$

Class B Laser

(wenn je klein
 $2kT \gg 1$)

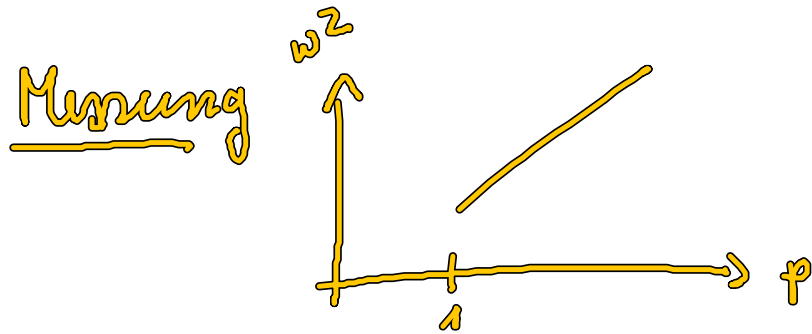
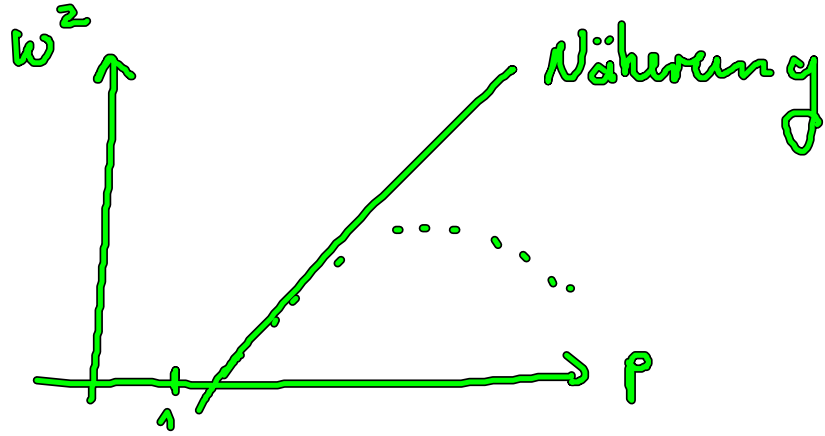
Größenordnungen

Laser	$\tau_{ph} (s)$	$T (s)$	γ
CO ₂	10^{-8}	$4 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$
Halbleiter Lasers	10^{-12}	10^{-9}	10^{-3}
HeNe	10^{-7}	10^{-8}	> 1

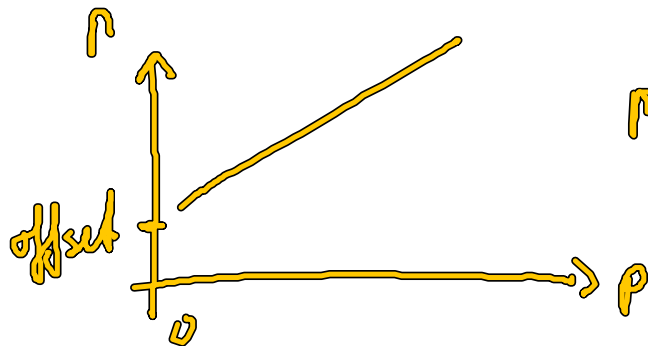
} $\ll 1$
B

Näherung für $P \ll 4kT$ und somit $\frac{P^2}{T^2} \ll \frac{8k}{T} (P-1)$

$$\Rightarrow \omega^2 \approx \frac{2k}{T} (P-1)$$



→ Bestimmung von \tilde{z}_{ph}
oder T möglich



$$n = \frac{p}{2T}$$

→ Bestimmung von T
möglich