2.1.3 Stabilität des lasenden Fixpunktes (Fortsetzung)

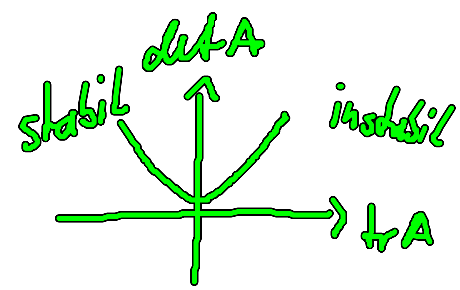
$$\dot{S} = WDS - 2\kappa S$$

Photonendichte

$$\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T} - 2WDSV$$

Inversion des 2 Niveau Atomlasers

(ii) 2. Fall: lasender Fixpunkt ist reell



$\det A >$

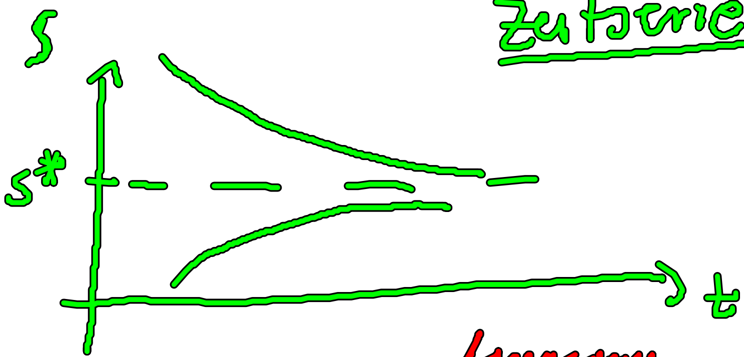
$\mathrm{tr}\,A < 0$

$\mathrm{tr}\,A^2 > 4 \det A$

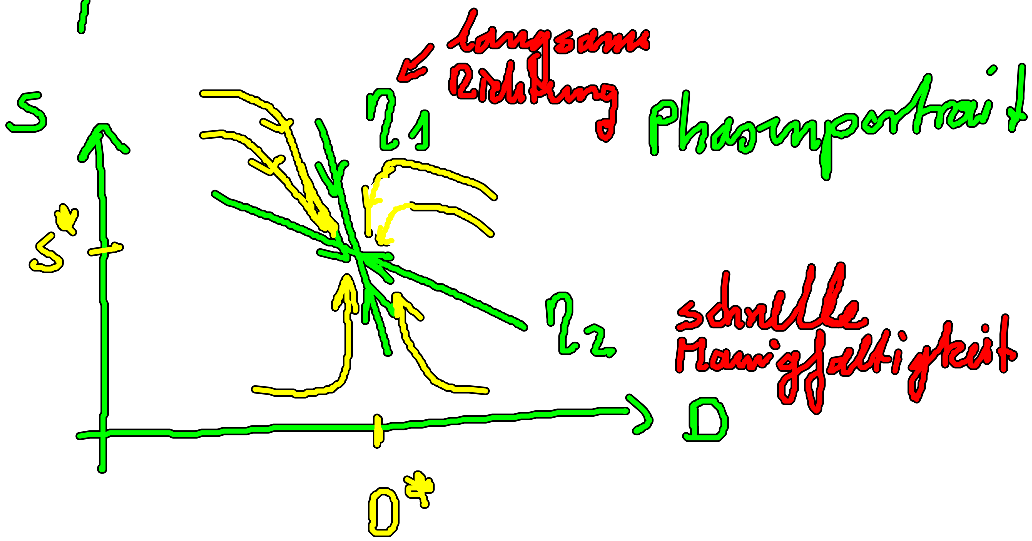
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} = c_1 \eta_1 e^{-|\lambda_1| t} + c_2 \eta_2 e^{-|\lambda_2| t}$$

allgemeine Lösung

Zeitserien



$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\frac{P}{T} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P^2}{T^2} - \frac{8R(P-1)}{T}}$$



- alle Trajektorien nähern sich tangential zur Eigenrichtung mit betragsmäßig kleinsten EW an den Fixpunkt an

stabiler Knoten

- λ_1 und λ_2 definieren 2 Zeitskalen im System
- wenn Größenordnungen stark verschieden sind, dann ist Dynamik nach kurzer Zeit durch langsame Richtung beschreibbar

Entwickelung der Eigenwerte für kleine $\boxed{4kT \ll 1}$

(Elektronen leben kürzer als Photonen)

$$\boxed{\lambda_{1,2}} = -\frac{1}{2}\frac{p}{T} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2}{T^2} - \frac{8kT(p-1)}{T^2}}$$

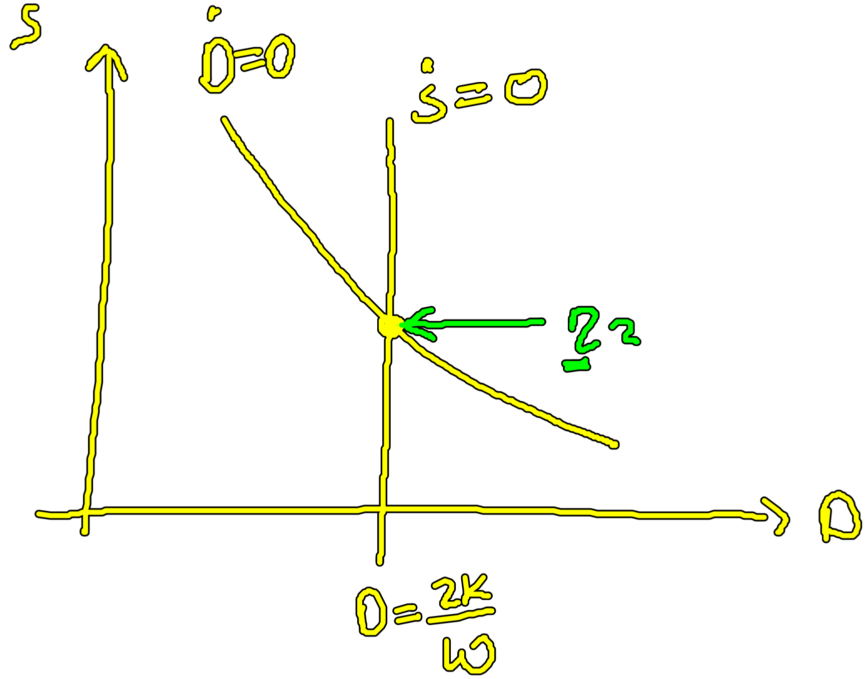
$$\left(f(4kT) \approx f(0) + \frac{1}{2} f'(0)\, 4kT \right)$$

$$\approx -\frac{1}{2}\frac{p}{T} \pm \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{p^2}{T^2}} + \frac{1}{2\cdot 2}\sqrt{\frac{p^2}{T^2}}^{\,-1} \cdot 8kT\,\frac{(p-1)}{T^2}\cdot(-1) \right]$$

$$\approx \begin{cases} 0 - k\,\dfrac{p-1}{p} = \lambda_1 & \text{langsam} \\[2ex] -\dfrac{p}{T} + \dfrac{p-1}{p}\,k = \lambda_2 & \text{schnell} \end{cases}$$

$2kT \ll 1$

$2k \ll \frac{1}{T}$



Nullklinen:

$$\boxed{\dot{D}=0}$$

$$2WDSV = \frac{D_0 - D}{T}$$

$$s = \frac{D_0}{2TWVD} - \frac{1}{2TWV}$$

$$\boxed{\dot{s}=0}$$

$$2KS = WDS$$

Entwicklung der Dynamik: ① parallel zur D-Achse bis Nullkline erreicht ist

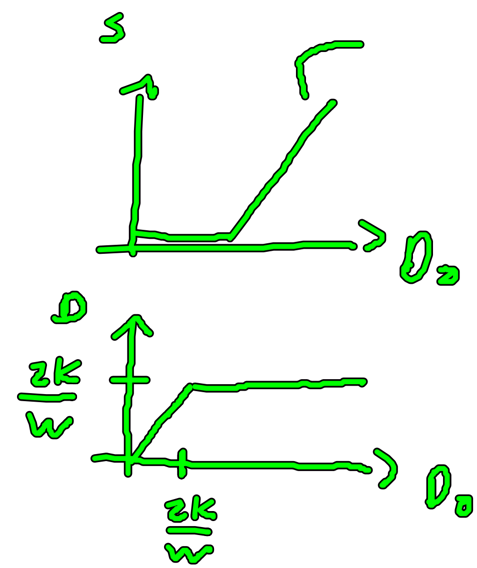
② langsam entlang $\dot{D}=0$

Sehe ich das an den Gleichungen?

▶ Asymptotische Argumentation für mögliche Reduktion der dyn. Freiheitsgrade:

- Zum Abschätzen der Unterschiede in $\dot{D}$ und $\dot{S}$ sollten D und S größen der Ordnung 1 sein ($O(1)$ quantities)

  → geschicktes Umnormieren nötig



Trick: Fixpunkte anschauen

$$2TwSV = \frac{D_0}{D} - 1$$

Also: $I = 2TwSV$ ist $O(1)$

$$\tilde{D} = \frac{w}{2k} D \text{ ist } O(1)$$

$\Rightarrow$ DGL in $\tilde{D}$ und I

$$\dot{I} = 2\kappa \tilde{O} I - 2\kappa I$$
$$\dot{\tilde{O}} = \frac{\tilde{O}_0 - \tilde{O}}{T} - \tilde{O} I \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{I} = \tau_{ph}^{-1} (\tilde{O} I - I)$$
$$\dot{\tilde{O}} = \frac{1}{T} (\tilde{O}_0 - \tilde{O} - \tilde{O} I)$$

wenn $\tau_{ph} \gg T$

ist $\dot{\tilde{O}} \gg \dot{I}$

Zeitskalentrennung von Elektronen und Photonen schlägt sich direkt auf Zeitentwicklung von $O \cdot I$ nieder

▷ Adiabatisches Eliminieren

$\dot{O} = 0 \quad \longrightarrow \quad O = \dfrac{O_0}{1 - 2TWSV}$

ändert sich erst schnell und ist dann Null

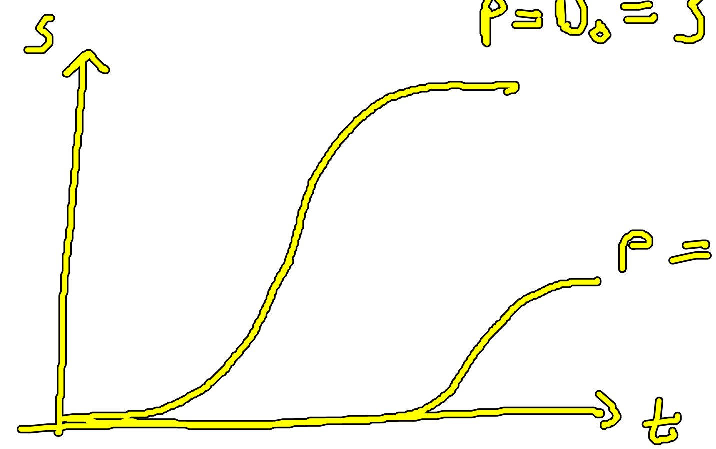
$$\longrightarrow \boxed{\dot{S} = WS \frac{O_0}{1 - 2TWSV} - 2\kappa S}$$

Class A Laser

- D wird von S versklavt
folgt instantan der Dynamik von S

$$\dot{S} = \text{Gain} \cdot S - \text{Verluste} \cdot S$$

Lösung $\sim e^{(\text{Gain} - \text{Verluste}) \cdot t}$



"gültig auf Zeitskalen $t > T$"

- Gain sättigt da
$$G = \frac{w D_0}{1 - 2wTSV}$$
- kritische Verlangsamung des Systems bei $p = 1$ (Schwelle)

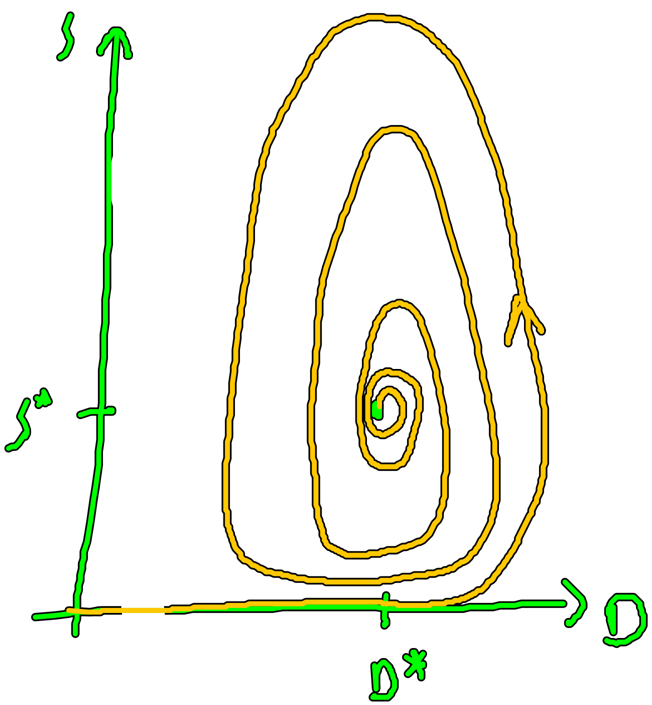
(Gain = Verlust)

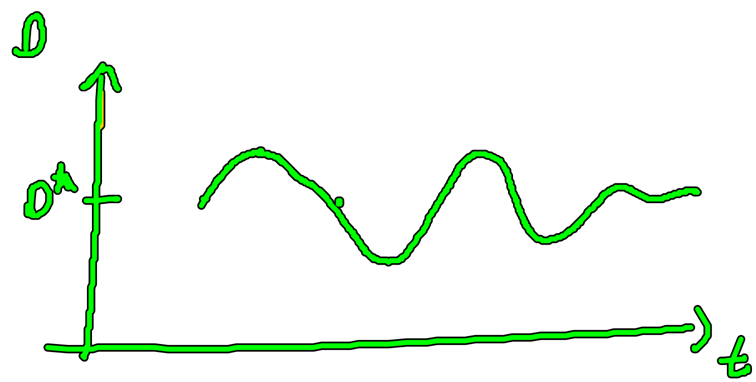
2.1.4 Dynamik für große Abweichungen vom Fixpunkt für Class B Laser

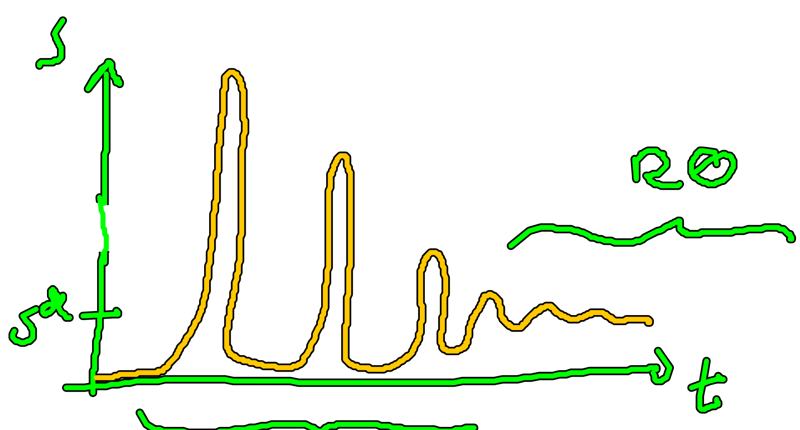
$2KT > 1$

Elektronen leben länger als Photonen

$$\gamma_1 = \frac{\tau_{ph}}{T} = \frac{1}{2KT}$$







Spiking

- nichtlinear verzerrten Oszillationen für $\gamma \ll 1$

Ziel: Näherungslösung für Spiking

Verwenden von dimensionslosen Größen

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{I} &= I(\tilde{D}-1)\\ \dot{\tilde{D}} &= \gamma\,(P-\tilde{D}(1+I))\end{aligned}}$$

$I = 2WTSV$

$\tilde{D} = \frac{W}{2K} D$

$t = \frac{t^{abs}}{\tau_{ph}} = 2Kt^{abs}$

Problem: Grenzfall $\gamma \to 0$
liefert unphysikalische Lösungen

$\dot{\tilde{D}} = 0 \quad \to \quad \dot{I} = I(\tilde{D}(0)-1)$

$I(t) = I(0)\,e^{[\tilde{D}(0)-1]t}$

$I \to 0$ oder $I \to \infty$

singulärer Grenzfall!

Lösung: Reskalieren der Gleichungen damit μ nicht mehr die rechte Seite multiplziert

Ansatz:

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \sigma s \\ I &= p - 1 + \alpha y \\ \tilde{D} &= 1 + \beta x \end{aligned}}$$

neue Zeit s

σ Periode der RO in Einheiten von 2π

neue Variablen, s, y, x

gesucht: σ, α, β

Bedingung: - weniger Parameter
- μ nicht vor rechten Seite der DGL

→ Hausaufgabe!

Ergebnis $\dot{y} = (1+y)x$

$\dot{x} = -y + O(\sqrt{y})$