

# 3.4. Stationäre Lösungen und Stabilität der Laser - Grundgleichungen im Ein-Moden Betrieb

- betrachte eine (stehende) Mode  $\lambda$  der Frequenz  $\omega_\lambda = \omega$
- inhomogen verbreiterte Linie . d.h.  $\bar{\omega}_n$  von  $n$  abhängig

## Grundgleichungen des Lasers

$$(I') \quad \dot{a} = (-i\omega - \kappa) a - i \sum_n g \lambda_n^* \rho_n \quad \text{Feldgleichung}$$

$$(II') \quad \dot{\rho}_n = (-i\bar{\omega}_n - \gamma_1) \rho_n + i g \lambda_n d_n a \quad \text{Polarisationsgleichung}$$

$$(III') \quad \dot{d}_n = \frac{d_s - d_n}{T} + 2i (g \lambda_n^* \rho_n a^* - g \lambda_n \rho_n^* a)$$

Inversionsgleichung

### 3.4.1. stationäre Lösungen

(i)  $a = 0$   
 $p_n = 0$   
 $d_n = d_0$       kein Laserbetrieb  
 (unterhalb der Schwelle)

(ii) Ansatz für stationäre Schwingungen des Lichtfeldes

$$a(t) = \varepsilon^{ss} e^{-i(\Omega t + \varphi)}$$

$$p_n(t) = p_n^{ss} e^{-i(\Omega t + \bar{\varphi})}$$

$$d_n = d_n^{ss} = \text{const}$$

( $\varepsilon^{ss}$  reell gewählt)  
 $|\varepsilon^{ss}|^2$  photonenzahl der mode  $\lambda$   
 $\Omega$  Laserfrequenz  
 (darf von  $\omega$  abweichen)  
 [ Annahme  $\varphi = \bar{\varphi} = 0$  ]

$d_n^{ss}$ ,  $\varepsilon^{ss}$ ,  $\Omega$  und  $p_n^{ss}$  müssen bestimmt werden!

Einsetzen in (I' - III'):

$$0 = \dot{\varepsilon}^{ss} = [i(\Omega - \omega) - \kappa] \varepsilon^{ss} - i \sum_{\nu} g_{\lambda\nu}^* p_{\nu}^{ss} \quad (\text{I}'' )$$

$$0 = \dot{p}_n^{ss} = [i(\Omega - \bar{\omega}_n) - \gamma] p_n^{ss} + i g_{\lambda n} d_n^{ss} \varepsilon^{ss} \quad (\text{II}'' )$$

$$0 = \dot{d}^{ss} = \frac{d_0 - d_n^{ss}}{T} + 2i (g \lambda_n^* \rho_n^{ss} \varepsilon^{ss} - c.c.) \quad (\text{III}''')$$

$$(\text{III}''') \Rightarrow \boxed{\rho_n^{ss} = \frac{-ig \lambda_n d_n^{ss} \varepsilon^{ss}}{i(\Omega - \bar{\omega}_n) - \gamma}} \quad (*)$$

• stationärer Zusammenhang zwischen Polarisation, Feld und Inversion

Bem: falls  $\gamma \gg \kappa, \frac{1}{T}$  gilt dieser Zusammenhang auch fern vom stationären Zustand falls  $t \gg \frac{1}{\gamma}$

„Verzweigungsprinzip“ von Haken  
 „Prinzip des adiabatischen Eliminierens“

(\*) einsetzen in (III'')

$$0 = \dot{d}_n^{ss} = \frac{d_0 - d_n^{ss}}{T} - 2i \left( \frac{|g \lambda_n|^2 |\varepsilon^{ss}|^2 d_n^{ss}}{(\Omega - \bar{\omega}_n) + i\gamma} - c.c. \right)$$

$$\dot{d}_n^{ss} = \frac{d_0 - d_n^{ss}}{T} - 2d_n^{ss} |\varepsilon^{ss}|^2 \quad \underbrace{|\varepsilon^{ss}|^2 \frac{2\gamma}{(\Omega - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma^2}}_{W_{\lambda_n}} \quad (\text{III}''')$$

$W_{\lambda_n}$ : Einstein Koeffizient der induzierten Emission (jetzt hergeleitet!)

• neu: Laserfrequenz  $\Omega$  kann abweichen von Modalfrequenz  $\omega$

(Bem: Gleichung III''' ergibt falls  $W_{\lambda_n} = W$  mit  $D = \sum_n d_n$   
 $\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T} - 2DW S_{\lambda} \Rightarrow$  adiabatisches Eliminieren von  $\rho$  liefert Bilanzgleichung)

$0 = \dot{d}_n^{ss}$   
 $\Rightarrow$

$$d_n^{ss} = \frac{d_0}{1 + 2TW_{\lambda_n} |\varepsilon^{ss}|^2}$$

\*3

stationäre Lösung für Inversion identisch mit Lösung der Bilanzgleichung

\* einsetzen in (I'')

$$\left[ i(\Omega - \omega) - \kappa + i \sum_n \frac{|g\lambda_n|^2}{\Omega - \bar{\omega}_n + i\gamma} d_n^{ss} \right] \xi^{ss} = \dot{\xi}^{ss} = 0$$

separiert in Real und Imaginarteil ( $\xi^{ss}$  reell gewählt) ergibt die 2 Gleichungen

$$\text{Im: } \left[ \Omega - \omega + \sum_n |g\lambda_n|^2 \frac{\Omega - \bar{\omega}_n}{(\Omega - \omega_n)^2 + \gamma^2} d_n^{ss} \right] \xi^{ss} = 0$$

$$\text{Re: } \left[ -\kappa + \sum_n |g\lambda_n|^2 \frac{\gamma}{(\Omega - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma^2} d_n^{ss} \right] \xi^{ss} = 0$$

• entspricht der stationären Bilanzgleichung der Photonen

$$\left[ -\kappa + \sum_n \frac{1}{2} W_{\lambda n} d_n^{ss} \right] \varepsilon^{ss} = \varepsilon^{ss}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_n \frac{1}{2} W_{\lambda n} d_n^{ss} = \kappa} \quad (*_2)$$

• die Gleichung für den Invertierten liefert zusätzlich die Laserfrequenz  $\Omega$

a) homogene Linienbreite

( $\bar{\omega}_n = \bar{\omega}$  nicht abhängig)

$$\omega - \Omega = - \frac{\bar{\omega} - \Omega}{2\gamma_1} d_0 \sum_n \frac{W_{\lambda n}(\Omega)}{1 + 2T W_{\lambda n} |\varepsilon^{ss}|^2}$$

2K wegen  $(*_2)$ ,  $(*_3)$

$$\omega + \bar{\omega} \frac{\kappa}{\gamma_1} = \Omega \left( 1 + \frac{\kappa}{\gamma_1} \right)$$

$$\Omega = \omega \frac{\gamma}{\gamma + \kappa} + \bar{\omega} \frac{\kappa}{\gamma + \kappa}$$

⊗<sub>4</sub>

$$q^{ss} = \epsilon^{ss} e^{i\Omega t}$$

- Die Modenfrequenz des leeren Resonators  $\omega$  <sup>wird</sup> durch WW zwischen Licht und Materie zu  $\Omega$  verschoben

- Verschiebung wächst wenn  $\kappa$  auf gleicher GröÙenstufe wie  $\gamma$

- falls  $\gamma \gg \kappa \rightarrow \Omega = \omega$   
keine Verschiebung  
(Bilanzgleichungsfall)

b) inhomogene verbreiterte Linie

- die Frequenzverschiebung  $\omega - \Omega$  hängt zusätzlich von Photonenzahl  $|\epsilon^{ss}|^2$  ab

$\rightarrow$  komplizierte nichtlineare Gleichung für  $\Omega$

### 3.4.2. Stabilität der stationären Lösung

(i)  $a_1 p_0^* = 0$

---

Spezialfall  $\bar{\omega}_n = \omega$  (starke Resonanz)  
 $g \lambda_n = g$

$$P = \sum_n P_n$$
$$D = \sum_n d_n$$

$\Rightarrow$

$$\dot{a} = (-i\omega - \kappa) a - ig^* P$$
$$\dot{P} = (-i\omega - \gamma) P + ig D a$$
$$\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T} + 2i (g^* P a^* - g P^* a)$$



Linearisieren um Fixpunkt  $p=0$   
 $\alpha=0$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{\alpha} \\ \delta \dot{p} \\ \delta \dot{D} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -i\omega - \kappa & -ig^* & 0 \\ ig D_0 & -i\omega - \mu & 0 \\ 0 & 0 & -1/T \end{pmatrix}}_{A = DF|_{(0)}} \begin{pmatrix} \delta \alpha \\ \delta p \\ \delta D \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

Skalargleichung für Eigenwerte  $\lambda$

$$\left(\lambda + \frac{1}{T}\right) \left( \lambda^2 + \lambda(2i\omega + \kappa + \mu) + (i\omega + \kappa)(i\omega + \mu) - |g|^2 D_0 \right) = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T}$$

gekoppelte Eigenmoden  
 von Dipolmoment und Feldmoden

Relaxation der  
 Inversion

beschrieben durch  $\lambda_1$

$$\lambda_{2,3} = -i\omega - \frac{\kappa + \mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa - \mu}{2}\right)^2 + |g|^2 D_0}$$

Oszillation

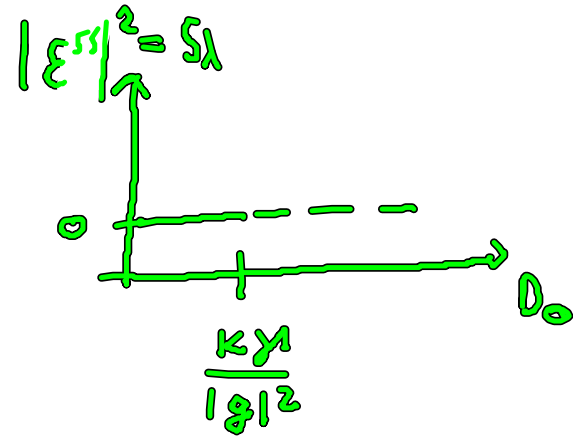
Dämpfung ( $< 0$ )  
 oder Entdämpfung ( $> 0$ )

Der nicht lasernde stationäre Zustand ist stabil falls  $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$ . [Es gilt stets  $\operatorname{Re} \lambda_3 < 0$ ]

$$\text{d.h. } \frac{\kappa \gamma}{2} > \sqrt{\left(\frac{\kappa - \gamma}{2}\right)^2 + |g|^2 D_0}$$

$$\kappa \gamma > |g|^2 D_0$$

$$D_0 < \frac{\kappa \gamma}{|g|^2}$$



Laserschwelle  $D_0^{\text{th}} = \frac{\kappa \gamma}{|g|^2}$

Bem : wegen  $\omega_{\lambda_n} = |g|^2 \frac{z}{\gamma}$  für  $\bar{\omega}_n = \omega_\lambda = \Omega$  ist die Laserschwelle identisch mit  $D_0^{\text{th}} = \frac{2\kappa}{\omega} = \frac{2\kappa \gamma}{|g|^2 \cdot 2}$ , das für Bilanzgleichungen hergeleitet wurde.

$\Rightarrow$  Nicht lasernder Zustand wird an der Schwelle  $D_0^{\text{th}} = \frac{K\gamma}{1g/2}$  instabil.

Frage: Ist der stationäre Lasernde Zustand beschriebenes durch  $*1-4$  stabil?

Lösung gegeben durch:

$$K = \sum_n \frac{1}{2} W_{\lambda n} d_n^{SS} \quad \text{aus } (*2)$$

$$\Omega \left(1 + \frac{K}{\gamma}\right) = \omega + \frac{1}{2\gamma} \sum_n (W_{\lambda n} d_n^{SS} \bar{\omega}_n) \quad \text{aus } (*4)$$

$$|\xi^{SS}|^2 = \frac{\frac{d_0}{d_n^{SS}} - 1}{2TW_{\lambda n}} \quad \text{aus } (*3)$$

$$W_{\lambda n} = \frac{2|g_{\lambda n}|^2 \gamma}{(\Omega - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma^2}$$

$$p_n^{ss} = - \frac{g \lambda_n d_n^{ss} \varepsilon^{ss}}{\Omega - \bar{\omega}_n + i\gamma} \quad \text{aus } \otimes$$

dies sind  $2n+2$   
Bestimmungsgleichung  
für Fixpunkt (ii)

Für  $\bar{\omega}_n = \bar{\omega}$   
 $W \lambda_n = W$   
 $g \lambda_n = g$  (keine Abhängigkeit von  $n$ )

$$|\varepsilon^{ss}|^2 = \frac{D_0 - 1}{2TW} \quad ; \quad D^{ss} = \frac{2K}{W}$$

$$p^{ss} = \frac{g D \varepsilon^{ss}}{\Omega - \bar{\omega} + i\gamma} \quad ; \quad \Omega \left(1 + \frac{K}{\gamma}\right) = \omega + \bar{\omega} \frac{K}{\gamma}$$