

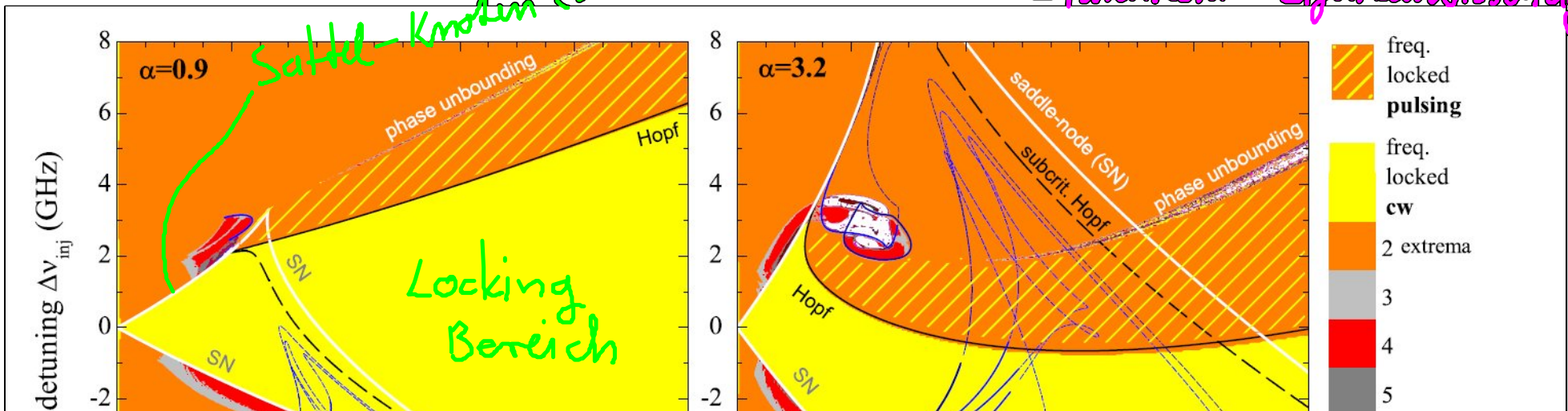
# 4.4. Bifurkationsanalyse eines Halbleiterlasers + Injektions

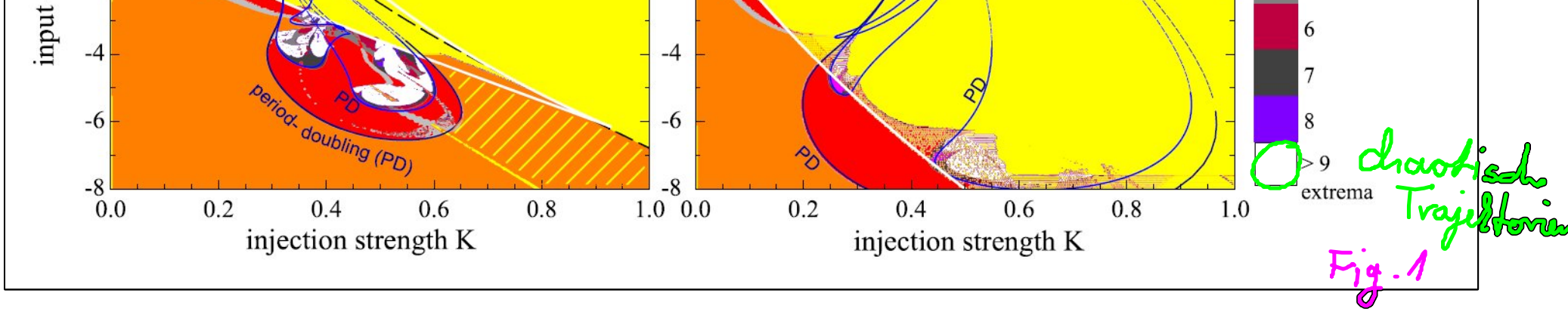
Adler Gleichung <sup>aus 4.3.</sup> liefert ausschließlich Sattelnoden Bifurkationen.

- für kleinen Injektionsstärken passt das zum Experiment ansonsten Abweichungen

Bsp: Quantenpunkt Laser mit opt. Injektion

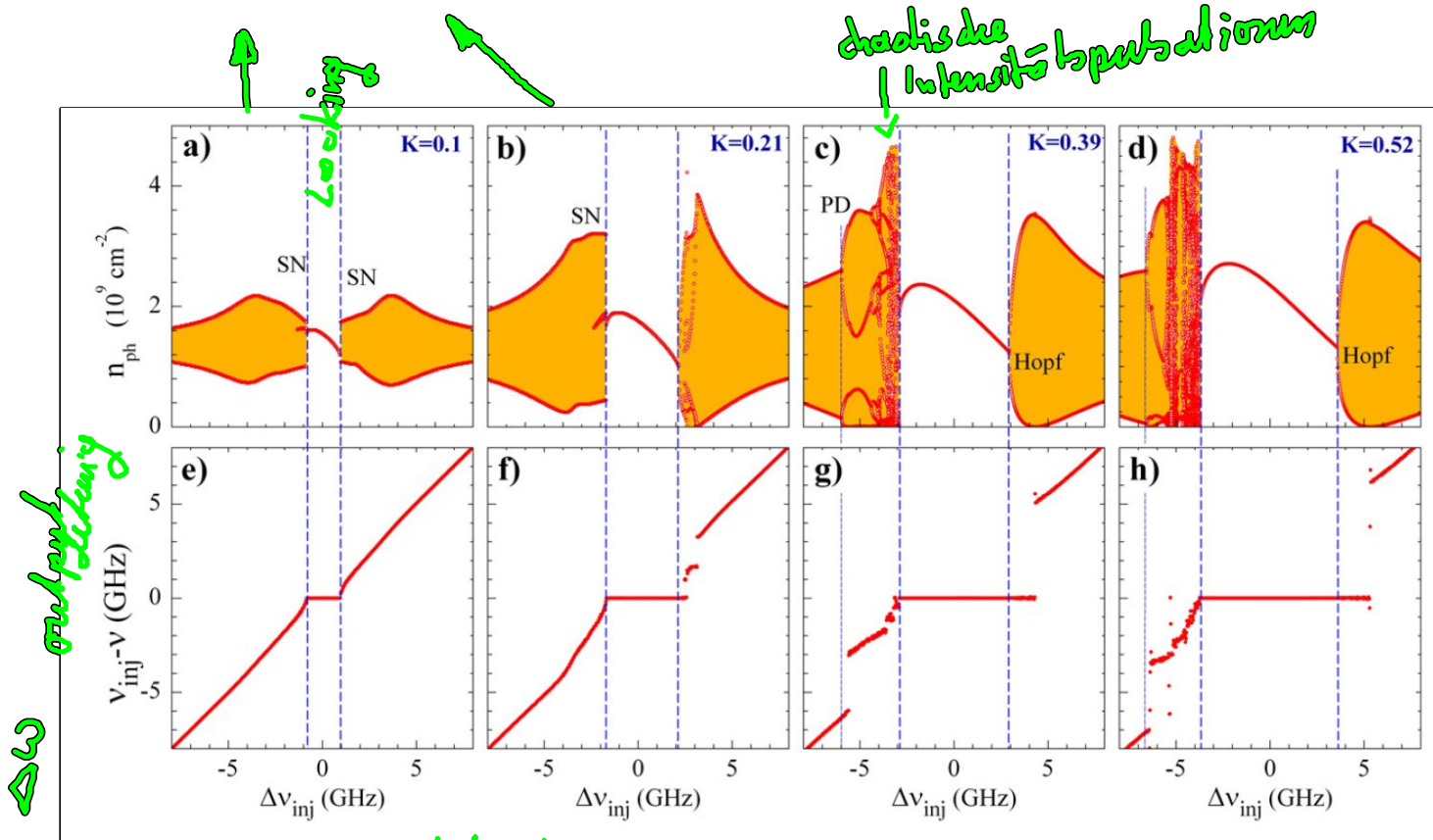
2 Parameter Bifurkationsdiagramm





für kleine  $k$  wie Adler loading

• Abhängigkeit vom  $\alpha$ -Faktor  
• führt Asymmetrie ein



1 Parameter  
Bifurkationsdiagramm  
(Schnitte durch Fig. 1)

$\Delta \omega = 0 \Rightarrow$   
← gleiche Frequenz  
von Slave + Master

input detuning  
 $\Delta \omega_{inj}$

## nächster Schritt nach reinem Phasenoszillator:

- Class A Laser - Feldgleichung mit Amplitude + Phase

$$\dot{I} = I \left( \frac{P_G}{1+I} - 1 \right)$$

$P_G$ : Pumpparameter  $P_G = \frac{W}{2k} D_0$   
 $I$ : Intensität (siehe 2.1, 3)

$$I = E^2$$

$$\dot{I} = 2\dot{E} E$$

⇒ Feldgleichung + Injektion

$$\dot{E} = \frac{1}{2} E \left( \frac{P_G}{1+|E|^2} - 1 \right) + \underbrace{\frac{E_{inj}}{\tau}}_K e^{i(\underbrace{\Omega - \omega_{inj}}_{\Delta\omega_{inj}})t}$$

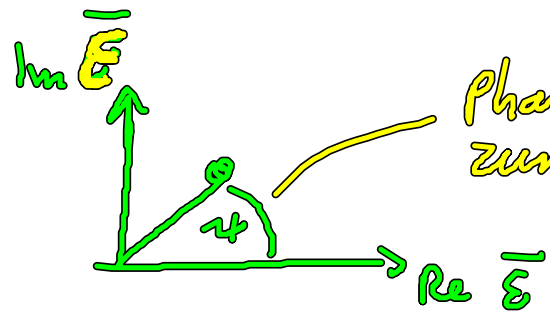
$$[a = E e^{-i\Omega t}]$$

Transformation ins mitbewegte  
Koordinatensystem

$$E = R e^{-i\psi} e^{+i\Delta\omega_{inj} t}$$

$$\overline{E}$$

R Amplitude  
 $\varphi$  Phase



Phase in der Locking  
 zunge nicht zeitabhängig

Class A Laser + Injection:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = \left( \frac{P}{1+R^2} - 1 \right) \frac{1}{2} R + K \cos \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \omega_{inj} - \frac{K}{R} \sin \varphi \end{cases}$$

Adler Gleichung mit R  
 abhängiger Injektionsstärke

Stationäre Lösungen bestimmen:

Fixpunkte (FP)

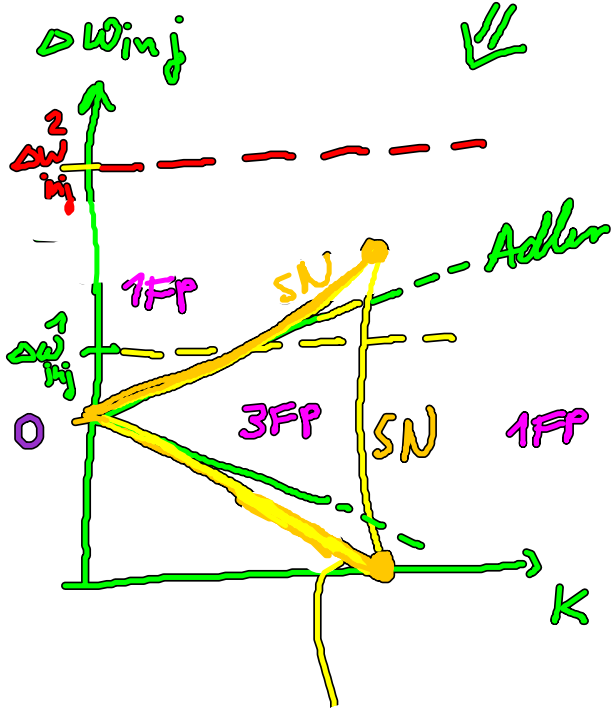
$$0 = \frac{1}{2} \left( \frac{P_0}{1+R^2} - 1 \right) R + K \cos \varphi$$

$$0 = \Delta \omega_{inj} - \frac{K}{R} \sin \varphi$$

$$\Rightarrow K^2 = R^2 \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{P_0}{1+R^2} - 1 \right)^2 + \Delta \omega_{inj}^2 \right] \quad (*)$$

(mit  $1 = \sin^2 + \cos^2$ )

2 Parameter Bifurkationsdiagramm

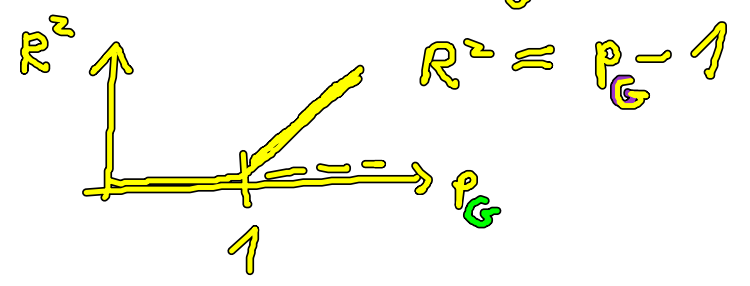
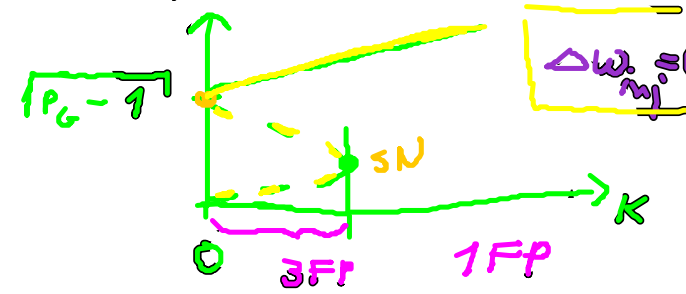
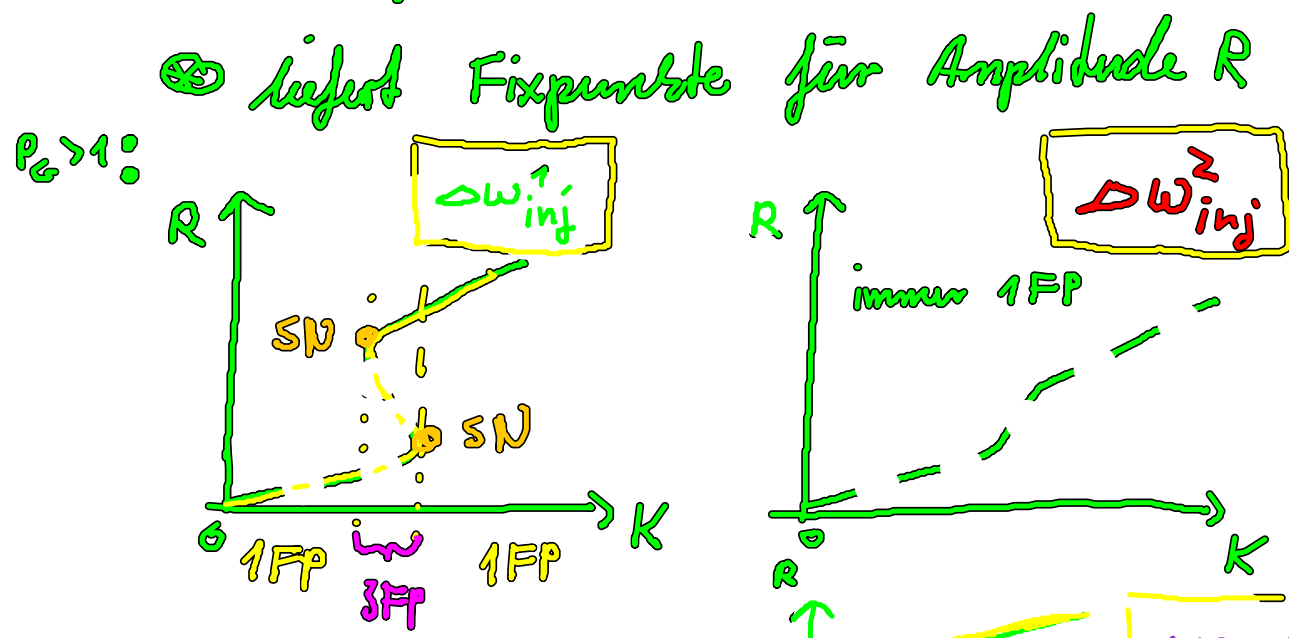


Extrema von  $\frac{\partial K}{\partial R}$  (aus  $\otimes$ )  
 liefern SN-Linien

Falls  $K=0$  muss  $\checkmark$  sich  $\checkmark$  steady state Charakteristik ergeben

d.h. FP mit kleiner Intensität ist instabil

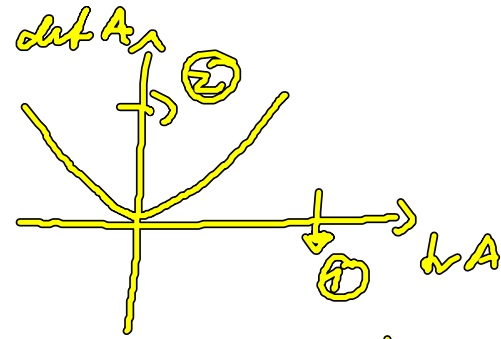
FP mit großer Intensität ungefähr bei  $R = \sqrt{P_G - 1}$  und zunächst stabil (kann durch Hopf destabilisiert werden)



Stabilität : charakteristisches Polynom liefert EW

$$\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

$\text{tr}A$        $\det A$

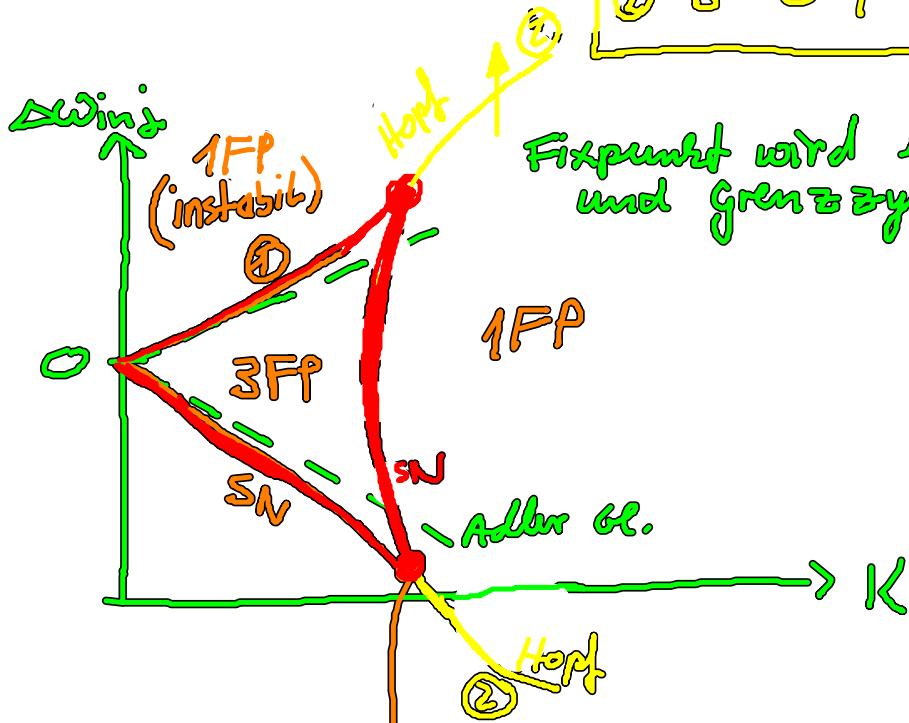


①  $B \neq 0, C = 0 = \lambda_1 \lambda_2$   
 $\rightarrow$  EW = Null  
 Bifurkation (Sattel-Knoten Bif)

②  $B = 0, C > 0 \Rightarrow$  Hopf Bifurkation  
 ( $\text{Re} \lambda_1 = 0 \quad \text{Im} \lambda_1 \neq 0$ )

Fixpunkt wird instabil  
 und Grenzzyklus entsteht

gegeben durch  
 $K = \sqrt{(\sqrt{P_6} - 1) [(\sqrt{P_6} - 1)^2 + \Delta \omega_{inj}^2]}$   
 und  
 $|\Delta \omega_{inj}| > \sqrt{P_6} - 1$



CUSP-Punkt (2 SN Linien treffen sich)

Fazit: Class A Laser Gleichungen liefern zusätzlich zur Adlergleichung:

- Hopf Linie (entsteht am CUSP Punkt)
- SN Linie bei höheren  $K$  (diese ist aber eine SN von instabilen FP und daher unerheblich für Lockingrange)

Letzer Schritt:

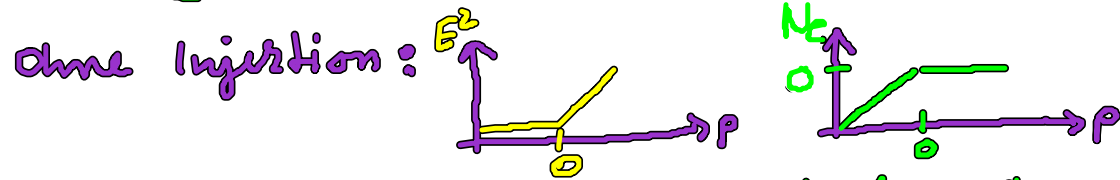
Class B Halbleiterlaser mit  $\alpha$ -Faktor (aus 4.2.)

• wieder <sup>Trop</sup> Vins mit bewegte Koordinatensystem:  $E = \sqrt{\frac{T_1 G_N}{2}} \epsilon e^{-i\Delta\omega_{ij}t}$   
 + dimensionslose Größen

$N_c = \frac{G_N}{4K} \tilde{N}$	$\tilde{N} = N - N_{th}$	Elektronen im Band
$t^{alt} = \frac{t^{neu}}{2K}$	$T = T_1 2K$	

$$\dot{E} = (1 + i\alpha) N_c E - i \frac{1}{2K} \Delta\omega_{ij} E + K$$

$$T\dot{N}_2 = P - N - (1 + 2N_2)|E|^2$$



Transformation auf Amplitude + Phase:

$$E = R e^{-i\varphi}$$

dimensionslose Injektionsstärke:

$$K = \sqrt{\frac{T_1 G_N}{2}} \frac{k}{2R} \epsilon_{in}$$

Class B Laser + Injektion

$$\dot{R} = N_2 R + K \cos \varphi$$

$$\dot{\varphi} = \omega_{inj} - \alpha N_2 - \frac{K}{R} \sin \varphi$$

$$T\dot{N}_2 = P - N_2 - (1 + 2N_2) R^2$$

\*\*

Pumpparameter  $P \sim |J - J_{th}|$

$N_2$ : dimensionslose Differenz zur Elektronenzahl an der Schwelle

Im Prinzip Lösungen und Stabilität über Jacobimatrix bestimmbar!

Alternativ: Lösungen durch Entwicklung nach Ordnungen von  $K$  (für  $K$  klein) bestimmen (liefert analytische Ausdrücke)

- im Grenzfall  $K \rightarrow 0$  müssen stationäre Zustände des einzelnen Lasers herauskommen

• Phase sollte Adler Gleichung ergeben



$$\Delta \omega_{ij} = K \Delta_1 + K^2 \Delta_2 + \dots$$

Input deformation von gleicher Größenordnung wie  $K$

$$R = R_0(t, \tau) + K R_1(t, \tau) + \dots$$

$$\psi = \psi_0(t, \tau) + K \psi_1(t, \tau) + \dots$$

$$N = 0 + K N_1(t, \tau) + \dots$$

Vielzeitenansatz:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial t}}_K \frac{\partial R}{\partial \tau}$$

$$\tau = Kt$$

↑ langsame Zeit  
motiviert durch DGL  
für Phase  $\psi$

Einsetzen in ~~(\*)~~ liefert

$$(I) \frac{d}{dt} R_0 + K \left( \frac{dR_0}{d\tau} + \frac{dR_1}{dt} \right) = K (N_1 R_0 + \cos \psi_0)$$

$$\text{(II)} \quad \frac{d}{dt} \psi_0 + K \left( \frac{d\psi_0}{dz} + \frac{d\psi_1}{dt} \right) = K \left( \Delta_1 - \alpha N_1 - \frac{\sin \psi_0}{R_0} \right)$$

$$\text{(III)} \quad \Gamma K \frac{\partial N_1}{\partial t} = p - R_0^2 - K (N_1 + 2R_0 R_1 + 2N_1 R_0^2)$$

(alle Terme mit  $K^2$ )  
symmetrisch

2. Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial t} R_0 = 0 \quad ; \quad p = R_0^2 \Rightarrow R_0 \text{ ist konstant in } t \text{ \& } z \Rightarrow \frac{\partial R_0}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_0 = 0$$

$\uparrow$   $\psi_0$  ist konstant in  $t$

1. Ordnung

$$\text{aus (I):} \quad \frac{\partial R_1}{\partial t} = N_1 \sqrt{p} + \cos \psi_0 \quad \text{①}$$

aus (III):  $T \frac{\partial N_1}{\partial t} = -N_1 - 2\sqrt{p} R_1 - 2N_1 p \cos \psi_0$  ← ableiten nach  $t$   
 und einsetzen  
 in  $\mathcal{D}_1$  ergibt:

DGL für  $N_1$

$$\Rightarrow T \dot{N}_1 = -\dot{N}_1 (2p - 1) - 2p N_1 - 2\sqrt{p} \cos \psi_0$$

↗ konstant in  $t$

Lösung

$$N_1 = c_1 e^{-At} + c_2 e^{-\bar{A}t} - \frac{1}{\sqrt{p}} \cos \psi_0$$

=

$N_1(t)$  bewegt sich exponentiell zu  $N_1 = -\frac{1}{\sqrt{p}} \cos \psi_0$

$\approx$  Abhängigkeit noch unbestimmt aber erst in nächster Ordnung wichtig

$\Rightarrow U_1(t)$  einsetzen in  $(*)_1 \rightarrow$  OGL für  $R_1$

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} = -\cos\varphi_0 + \cos\varphi_0 = 0$$

$\rightarrow R_1$  konstant in  $t$ !  
 $\neq$  Abhängigkeit erst  
in nächster Ordnung  
 $R_1(t)$  aus  $(*)_2$

Die Phasengleichung (II) hat mit  $U_1(t), R_0, N_0$   
nun die Form

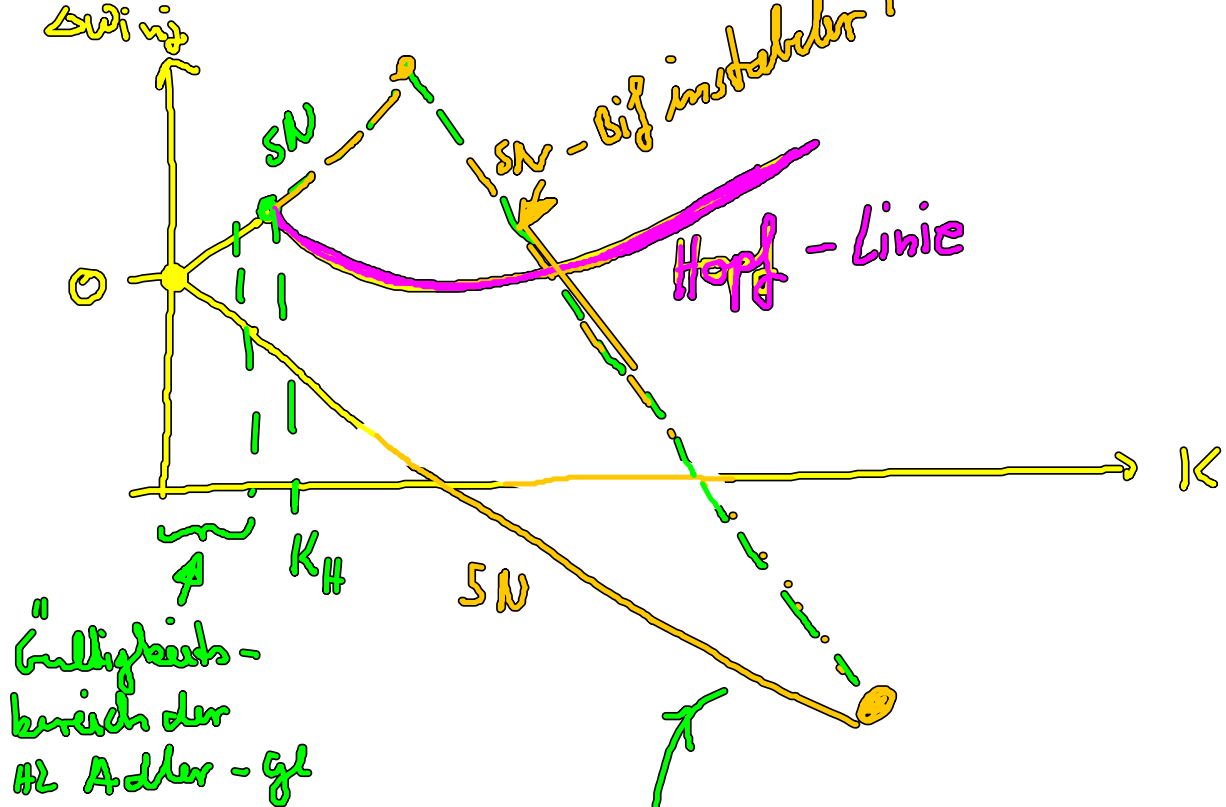
$$\dot{\varphi} = \omega_{inj} - \sqrt{\frac{1+d^2}{P}} K \sin(\varphi - \arctan d)$$

dies ist die HL Adler Gleichung und  
liefert Lockingbereich

$$\sqrt{\frac{1+d^2}{P}} K > |\Delta\omega_{inj}|$$

aus Stabilitätsanalyse ergibt sich:  
 $\alpha < 1$   
.. EPunkte

Nur gültig für  
kleine  $K$ !



Bem: Für analytische Näherungen der Hopf Linie basierend auf der asymp. Entwicklung siehe Buch Erneux: „Linear Dynamics“

- das geschlossene Dreieck der SN Linien wird durch  $\alpha > 0$  verformt

- Position der Hopflinie ist stark abhängig von der Dämpfung der RO des einzelnen Lasers

$$K_H \sim \frac{\Gamma_{RO}}{\sqrt{1+d^2}}$$

Ende

