Grundgleichungen der

semi-klassischen Lasertheorie

(1)

$$\frac{\partial}{\partial t} p^{(+)} = (-i\bar{\omega} - \gamma) p^{(+)} + \overbrace{\frac{1}{i\hbar} (\underline{E}\, \underline{\mu}_{21})}^{\omega_R} \underline{\mu}_{12}\, D$$

E-Feld

makrosk. Inversion

makr. Polarisation

$$\underline{P} = \underline{P}^{(+)} + \underline{P}^{(-)}$$

$$\sim e^{i\bar{\omega}t} \qquad e^{-i\bar{\omega}t}$$

(2) $$\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T} - \frac{2}{\hbar} \underline{E} \left(\underline{P}^{(-)} - \underline{P}^{(+)} \right)$$

(1) + (2) aus Schrödingergl.

(3) Wellengleichung

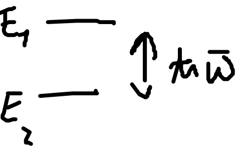
3.3. Näherungen der Laser-Grundgleichungen

- zunächst betrachten wir stehende Wellen im Resonator

→ Zerlegung nach Modenamplituden $E_\lambda(t)$ in positive und negative Frequenzanteile

$$E_\lambda(t) = E_\lambda^{(+)}(t) + E_\lambda^{(-)}(t)$$

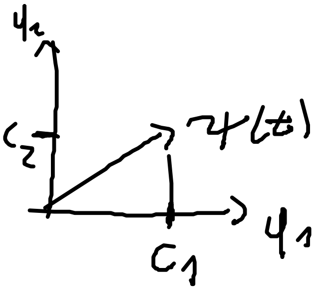
2 Niveau Sys.



$$E_\lambda^{\pm}(t) = \underbrace{\mathcal{E}_\lambda(t)}_{\text{Amplitude}}\, e^{\underbrace{\mp i\omega_\lambda t}_{\text{Phase}}}$$

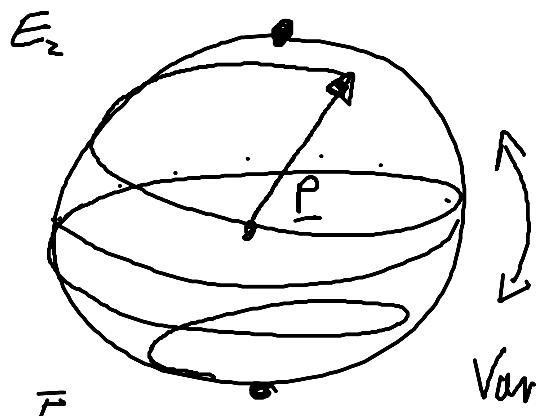
Amplitude: langsam veränderlich

Phase: oszilliert mit Lichtfrequenz



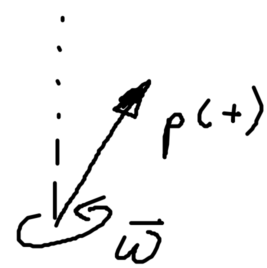
$$\underline{p}^{(+)}(t) \sim p_\mu(t) = (c_1^* c_2)(t)\, e^{-i\bar{\omega}t}$$

$$\underline{p}^{(-)}(t) \sim p_\mu^*(t) = (c_1 c_2^*)(t)\, e^{i\bar{\omega}t}$$



Variation durch treibendes $\mathcal{E}$-Feld

$\hat{=}$ Rabi-Frequenz $\omega_R = \dfrac{\underline{E}\,\mu_{21}}{\hbar}$



$\hat{=}$ Präzession des Spins

3.3.1. Rotating Wave Approximation (RWA)

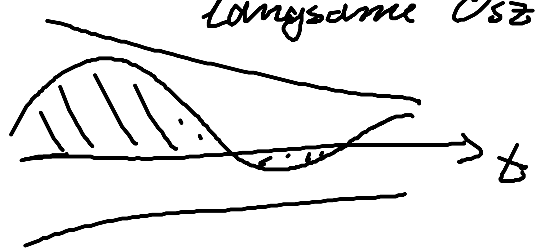
Term der Licht Materie WW in ②:

$$\underline{E}\left(\underline{p}^{(-)} - \underline{p}^{(+)}\right)$$

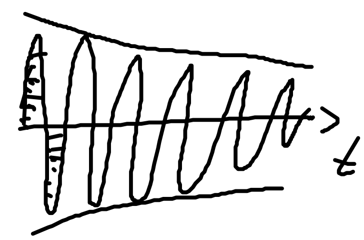
$$= \sum_\lambda \underline{u}_\lambda(\underline{x}) \left(E_\lambda^{(+)} + E_\lambda^{(-)}\right)\left(\underline{p}^{(-)} - \underline{p}^{(+)}\right)$$

$$= \sum_\lambda \underline{u}_\lambda(\underline{x}) \Big[\underbrace{E_\lambda^{+} \underline{p}^{-} - E_\lambda^{-} \underline{p}^{+}}_{\sim e^{\mp(\omega_\lambda - \bar{\omega})t}} + \underbrace{E_\lambda^{-} \underline{p}^{-} - E_\lambda^{+} \underline{p}^{+}}_{\sim e^{\mp(\omega_\lambda + \bar{\omega})t}} \Big]$$

langsame Osz.



schnelle Osz.



positive und negative Beiträge kompensieren

=> werden vernachlässigt

$$\overset{②}{\Rightarrow} \quad \dot{D} = \frac{D_0 - D}{T} - \frac{2}{i\hbar} \sum_\lambda \left[\underline{u}_\lambda E_\lambda^{+} \underline{p}^{-} - \underline{u}_\lambda E_\lambda^{-} \underline{p}^{+} \right]$$

Analog auf ① anwenden:

multiplizieren ① mit $\underline{p}^{(-)}$

$$\underline{\rho}^{(-)}\,\dot{\underline{\rho}}^{+} = (-i\bar{\omega} - \gamma)\,\underline{\rho}^{-}\,\underline{\rho}^{+} + \frac{\underline{\rho}^{-}}{i\hbar}\sum_{\lambda}\left(E_\lambda^{+} + E_\lambda^{-}\right)\left(\underline{u}_\lambda \underline{\mu}_{21}\right)\underline{\mu}_{12}\cdot\underline{D}$$

$\sim e^{i(\bar{\omega}-\omega_\lambda)t}$

vernachlässigt $\sim e^{i(\omega_\lambda+\bar{\omega})t}$

$\Rightarrow$

$$(1')\qquad \dot{\underline{\rho}}^{+} = (-i\bar{\omega} - \gamma)\,\underline{\rho}^{+} + \frac{1}{i\hbar}\sum_{\lambda} E_\lambda^{+}\left(\underline{u}_\lambda \underline{\mu}_{21}\right)\underline{\mu}_{12}\,\underline{D}$$

Analog bei Wellengleichung (3)

$$\omega_\lambda^{2} E_\lambda^{\pm} + \ddot{E}_\lambda^{\pm} + \sum_{\lambda'} \frac{\sigma_{\lambda\lambda'}}{\varepsilon_0} E_{\lambda'}^{\pm} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\ddot{P}_\lambda^{\pm}$$

Anteile $\ddot{P}_\lambda^{\mp}$ wurden vernachlässigt

$$\left[\, P_\lambda(t) = \int \underline{u}_\lambda \underline{P}\, d\underline{x} \,\right]$$

3.3.2. Slowly varying envelope approxim. (SVEA) (SVA)

Amplitude $\mathcal{E}(t)$ langsam gegenüber schneller Oszillation

$$|\dot{\mathcal{E}}_\lambda| \ll |\omega_\lambda \mathcal{E}_\lambda|$$

$$E_\lambda^{\pm}(t) = \mathcal{E}_\lambda(t)\, e^{\mp i\omega_\lambda t}$$

$$\dot{E}_\lambda^{\pm}(t) = \left(\dot{\mathcal{E}}_\lambda \mp i\omega_\lambda \mathcal{E}_\lambda\right) e^{\mp i\omega_\lambda t} \approx \mp i\omega_\lambda E_\lambda^{\pm}$$

$$\ddot{E}_\lambda^{\pm}(t) = \left(\ddot{\mathcal{E}}_\lambda \mp 2i\omega_\lambda \dot{\mathcal{E}}_\lambda \underbrace{- \omega_\lambda^2 \mathcal{E}_\lambda}\right) e^{\mp i\omega_\lambda t}$$

größte Term, wird von $\omega_\lambda^2 E_\lambda^{\pm}$ in Wellengleichung kompensiert

=> Entwicklung noch weiter nötig

verwende: $\ddot{\ }$ $\dot{\ }$

$$|\dot{\mathcal{E}}_\lambda| \ll |\omega_\lambda \mathcal{E}_\lambda|$$

$$\ddot{E}_\lambda^\pm(t) \approx \underbrace{(\mp 2 i \omega_\lambda \dot{\mathcal{E}}_\lambda - \omega_\lambda^2 \mathcal{E}_\lambda)\, e^{\mp i \omega_\lambda t}}$$

$$= \mp 2 i \omega_\lambda \left(\dot{E}_\lambda^\pm \pm i \omega_\lambda E_\lambda^\pm\right) - \omega_\lambda^2 E_\lambda^\pm$$

Analog: $\ddot{P}_\lambda^\pm \approx -\bar{\omega}^2 P_\lambda^\pm$ (hier muss die Entwicklung nicht weiter getrieben werden da kein Term $\bar{\omega}^2 P_\lambda^\pm$ vorkommt

$$\Rightarrow \mp 2 i \omega_\lambda \left(\dot{E}_\lambda^\pm \pm i \omega_\lambda E_\lambda^\pm\right) \mp i \omega_\lambda \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma_\lambda E_\lambda^\pm = \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{\omega}^2 P_\lambda^\pm$$

$$\boxed{\dot{E}_\lambda^\pm = (\mp i \omega_\lambda - \kappa_\lambda) E_\lambda^\pm \pm i \frac{1}{2\varepsilon_0} \bar{\omega} P_\lambda^\pm}$$

reduzierte Wellengleichung für stehende Wellen in SVA Näherung

$\left(\kappa := \frac{\sigma_\lambda}{2\varepsilon_0} \right.$ Annahme $\left. \sigma_{\lambda\lambda'} = \sigma_\lambda \delta_{\lambda\lambda'} \right)$

↑ optische Verlustrate

3.3.3. SVA für zeitlich und räumlich veränderliche Felder

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \underline{E}^+(\underline{x},t) + \underline{E}^-(\underline{x},t)$$

mit $\underline{E}^\pm(\underline{x},t) = \mathcal{E}^\pm(\underline{x},t)\, e^{\pm i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)}$

Amplitude (langsam)

ebene Welle mit $c|\underline{k}| = \omega$ oszilliert schnell

$$\underline{P}^\pm(\underline{x},t) = \underline{P}_A^\pm(\underline{x},t)\, e^{\pm i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)}$$

SVA: $|\ddot{\mathcal{E}}^+| \ll |\omega\, \dot{\mathcal{E}}^+|$, $|\Delta \mathcal{E}^+| \ll |(\underline{k}\underline{\nabla})\, \mathcal{E}^+|$

Wellengleichung:

$$\Delta \underline{E}^\pm - \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{E}}^\pm - \mu_0 \dot{\underline{E}}^\pm = \mu_0 \ddot{\underline{P}}^+$$

$$\overset{SVA}{\Longrightarrow} \Delta \underline{E}^+ - \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{E}}^+ \approx 2i\left((\underline{k}\nabla)\,\mathcal{E}^+ + \frac{\omega}{c^2}\dot{\mathcal{E}}^+\right) e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)}$$

$$\dot{\underline{E}}^{\pm} \approx \mp i\omega \mathcal{E}^{\pm} e^{i(\underline{k}\underline{x} - \omega t)}$$

$$\ddot{\underline{P}}^{\pm} \approx -\omega^2 \underline{P}_A^{\pm} e^{\pm i(\underline{k}\underline{x} - \omega t)}$$

$\Rightarrow$ reduzierte Wellengleichung mit Ausbreitung

$$\boxed{\dot{\mathcal{E}}^{\pm} + c(\underline{e}_k \nabla)\mathcal{E}^{\pm} = -\kappa \mathcal{E}^{\pm} \pm i \frac{\omega}{\varepsilon_0} \underline{P}_A^{\pm}}$$

$$\underline{k} = |\underline{k}| \underline{e}_k = \frac{\omega}{c} \underline{e}_k$$

Bem.: - falls Lasermedium neben der Polarisation $\underline{P}$ der laseraktiven Atome eine Hintergrund-polarisierbarkeit mit Brechungsindex n_r besitzt

$\rightarrow$ Lichtgeschwindigkeit im Medium $v_g = \frac{c}{n_r}$

Dimensionslose Variable für stehende Wellen im Resonator

$$E_\lambda^+(t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}}\; a_\lambda(t)$$

$$E_\lambda^-(t) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}}\; a_\lambda^*(t)$$

motiviert durch Übergang
zur voll-QM Beschreibung.
a_λ^* und a_λ entsprechen
Photon-Erzeuger und Vernichter operatoren

- $c_1(t)$, $c_2(t)$ sind dimensionslose Größen
- mikroskop. Polarisation $\tilde{p}_n \sim \mu\, p_n$

Index eines Atoms

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}
\dot{a}_\lambda &= \underbrace{(-i\omega_\lambda}_{\text{Osz.}} \underbrace{- \kappa_\lambda)}_{\text{Dämpfung}} a_\lambda \underbrace{- i\sum_n g_{\lambda n}^* p_n}_{\text{Antrieb durch Polarisation}} \\
\dot{p}_n &= \underbrace{(-i\tilde{\omega}_n}_{\text{Osz.}} \underbrace{- \gamma)}_{\text{Dämpfung}} p_n \underbrace{+ i\sum_\lambda g_{\lambda n}\, a_\lambda\, d_n}_{\text{Kopplung an Licht}} \\
\dot{d}_n &= \underbrace{\frac{d_0 - d_n}{T}}_{\text{Relaxation}} \underbrace{+ 2i\sum_\lambda \left(g_{\lambda n}^*\, p_n\, a_\lambda^* - g_{\lambda n}\, a_\lambda\, p_n^* \right)}_{\text{nichtlin. Kopplung, WW Atome-Licht}}
\end{aligned}}$$

mit Kopplungskonstanten

$$g_{\lambda n} := i \underline{\mu}_{21_n} \underline{e}_\lambda \, u_\lambda(\underline{x}) \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{\hbar 2 \varepsilon_0}}$$