3.6. Ableitung von Bilanzgleichungen im Vielmodenfall

- wir betrachten m Resonatormoden : $\lambda = 1, \dots m$
- Ansatz für zeitabhängige Lösungen der semiklassischen Lasergleichungen

Feldmode $\qquad a_\lambda(t) = \mathcal{E}_\lambda(t)\, e^{-i\Omega_\lambda t}$ $\qquad$ (*)

mikr. Polarisation $\qquad p_n(t) = \sum\limits_\lambda p^0_{\lambda n}(t)\, e^{-i\Omega_\lambda t}$

d.h. wir nehmen an dass die Dipole im Gleichtakt mit dem Feld schwingen

Ansatz eingesetzt in Gl II für Polarisation:

$$\sum_\lambda \left(\dot{p}^0_{\lambda n} - i\Omega_\lambda p^0_{\lambda n}\right) e^{-i\Omega_\lambda t} = (-i\bar{\omega}_n - \gamma)\sum_\lambda p^0_{\lambda n} e^{-i\Omega_\lambda t}$$
$$+ i \sum_\lambda g_{\lambda n}\, d_n\, \mathcal{E}_\lambda(t) e^{-i\Omega_\lambda t}$$

Koeffizientenvergleich für die einzelnen Moden λ:

(näherungsweise gültig für $\mathcal{E}_\lambda(t)$ & $\overset{\circ}{\rho}_{\lambda n}(t)$ langsam gegenüber $e^{-i\Omega_\lambda t}$)

$$\Rightarrow \dot{\overset{\circ}{\rho}}_{\lambda n} = \left[-i(\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda) - \gamma\right] \overset{\circ}{\rho}_{\lambda n} + i g_{\lambda n} d_n \mathcal{E}_\lambda$$

Ansatz ⊛ eingesetzt in I & III für Feld und Inversion

$$\dot{d}_n = \frac{d_0 - d_n}{T} + 2i \sum_{\lambda\lambda'} \Big(g^*_{\lambda n} \overset{\circ}{\rho}_{\lambda' n} \mathcal{E}^*_\lambda e^{i(\Omega_\lambda - \Omega_{\lambda'})t} - g_{\lambda n} \overset{\circ}{\rho}^*_{\lambda' n} \mathcal{E}_\lambda e^{-i(\Omega_\lambda - \Omega_{\lambda'})t} \Big)$$

$$\dot{a}_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) a_\lambda - i \sum_{n\lambda'} g^*_{\lambda n} \overset{\circ}{\rho}_{\lambda' n} e^{-i\Omega_\lambda t}$$

<u>Näherungsannahmen</u>:

(i) Polarisation relaxiert schneller als Inversion und Feldmoden

$$\gamma \gg \frac{1}{T} \qquad \gamma \gg \kappa$$

z.B. erfüllt im Halbleiterlaser

<u>class B Laser</u>

$\rightarrow$ dann können wir $\rho^0_{\lambda n}$ adiabatisch eliminieren

d.h. $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho^0_{\lambda n} \approx 0}$ auf der langsamen Zeitskala auf der sich $\mathcal{E}_\lambda(t)$ und $d_n(t)$ ändern

$$\Rightarrow \rho^0_{\lambda n} = \frac{i g_{\lambda n} d_n \mathcal{E}_\lambda}{i(\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda) + \gamma}$$

$$\Rightarrow \rho_n = \sum_\lambda \frac{1}{\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda - i\gamma} g_{\lambda n} d_n a_\lambda \qquad *_p$$

mikr. Polarisation eines Atoms

sind noch langsam zeitabhängige Größen

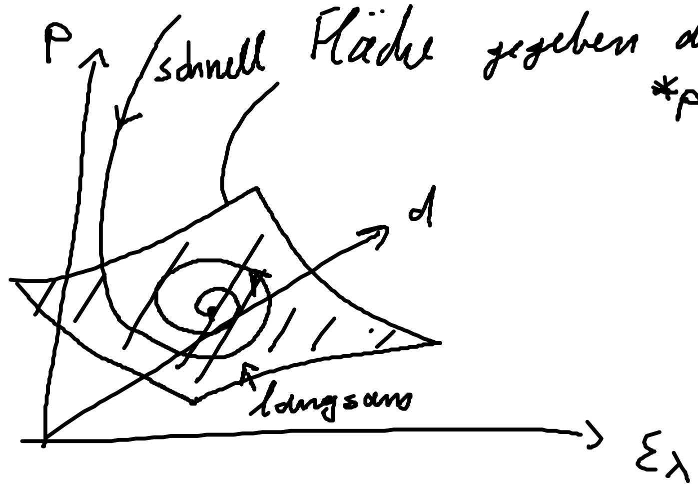
- Die schnelle Variable ρ_n wird durch die langsamen Variablen a_λ und d_n instantan mitgeschleppt, hat aber keinen eigenen dynamischen Freiheitsgrad

„Versklavungsprinzip", Haken 1970

allgemeines Prinzip in Systemen mit Zeitskalentrennung

class C Laser

$$\dot p = 0 \Longrightarrow$$



Class B Laser

Einsetzen des quasistationären Zusammenhanges *p in Laser Grundgleichungen I und III:

$$\dot a_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda)\, a_\lambda - i \sum_{n\lambda'} \frac{g_{\lambda n}^* \, g_{\lambda' n}}{\bar\omega_n - \Omega_{\lambda'} - i\gamma} \, a_{\lambda'} d_n$$

$$\dot d_n = \frac{d_0 - d_n}{T} - 2i \sum_{\lambda\lambda'} \left[\frac{g_{\lambda n}\, g^*_{\lambda' n}}{\bar\omega_n - \Omega_{\lambda'} + i\gamma} \, a^*_{\lambda'} a_\lambda - c.c. \right] d_n$$

Übergang zur Photonenzahl $S_\lambda = a_\lambda^* a_\lambda$

$$\dot S_\lambda = \dot a_\lambda^* a_\lambda + a_\lambda^* \dot a_\lambda \Rightarrow (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda)\, a_\lambda^* a_\lambda - i \sum \frac{g_{\lambda n}^* \, g_{\lambda n}}{\bar\omega_n - \Omega_{\lambda'} - i\gamma} \, a_\lambda^* a_{\lambda'} \, d_n + c.c.$$

$$\dot{S}_\lambda = -2\kappa_\lambda S_\lambda + \sum_{n\lambda'} \left[i \frac{g_{\lambda n} g^*_{\lambda' n} a_\lambda a^*_{\lambda'}}{\bar{\omega}_n - \Omega_{\lambda'} + i\gamma} - i \frac{g^*_{\lambda n} g_{\lambda' n} a^*_\lambda a_{\lambda'}}{\bar{\omega}_n - \Omega_{\lambda'} - i\gamma} \right] d_n$$

(ii) Vernachlässigung der Phasenkorrelationen

(Gegenteil zur Modenkopplung)

Annahme: Phasen verschiedener Feldmoden sind unkorreliert

$$a_\lambda = \mathcal{E}_\lambda(t) e^{-i\Omega_\lambda t}$$
$$= |\mathcal{E}_\lambda| e^{-i\Omega_\lambda t + \varphi_\lambda}$$

=> Phasenmittel mit $\lambda \neq \lambda'$ verschwindet

$$\overline{a^*_\lambda a_{\lambda'}} = |\mathcal{E}^*_\lambda(t) \mathcal{E}_{\lambda'}(t)| e^{i(\Omega_\lambda - \Omega_{\lambda'})t} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_\lambda \int_0^{2\pi} d\varphi_{\lambda'}\, e^{i(\varphi_\lambda - \varphi_{\lambda'})}}_{\substack{= 0 \text{ für } \varphi_\lambda \neq \varphi_{\lambda'} \\ = 1 \text{ für } \varphi_\lambda = \varphi_{\lambda'}}}$$

$$= S_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\Rightarrow \dot{d}_n = \frac{d_0 - d_n}{T} + 2 \sum_\lambda \underbrace{\frac{i(\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda + i\gamma) - i(\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda - i\gamma)}{(\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda)^2 + \gamma^2} |g_{\lambda n}|^2}_{-W_{\lambda n}} \cdot S_\lambda d_n$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{d}_n &= \frac{d_0 - d_n}{T} - 2 \sum_\lambda W_{\lambda n} S_\lambda d_n \\ \dot{S}_\lambda &= -2\kappa_\lambda S_\lambda + \sum_n W_{\lambda n} S_\lambda d_n \end{aligned}}$$

- dies sind genau die Bilanzgleichungen die bereits untersucht worden sind (ohne spontane Emission)

- Gleichungen sind gut für Beschreibung der Laserdynamik auf Zeitskalen $> \frac{1}{\gamma}$ wenn Phasenkorrelationen nicht von Interesse sind

Reduzierung der dyn. Freiheitsgrade im Laser-Modell: