2. Bilanzgleichung – Laser Ratengleichungen

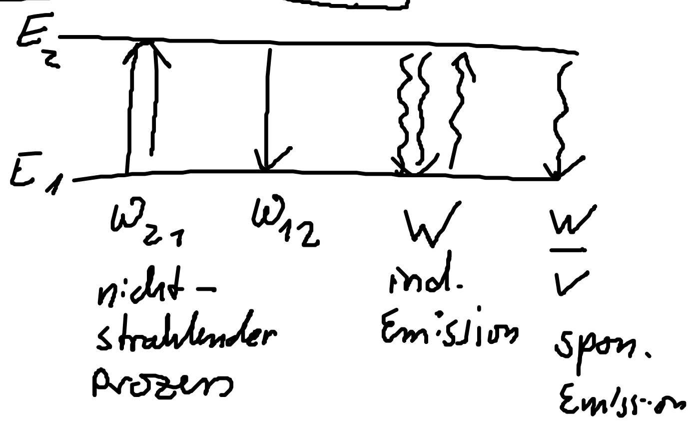
- Laserintensität beschrieben durch Photonendichte S
- Besetzungszahlen N_1, N_2 des 2-Niveau Systems

Inversion $D := N_2 - N_1$

2.1. Ein-Moden-Laser

aus (I) und (II) folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= WDS - 2\kappa S + \frac{1}{2}\frac{W}{V}(N+D) \\ \frac{dD}{dt} &= \frac{D_0 - D}{T_1} - 2WDS - \frac{W}{V}(N+D) \end{aligned}}$$



$2\kappa^{-1} \mathrel{\hat=}$ Photonenlebensdauer τ_{ph}

$N = N_1 + N_2$ Zahl der Atome in der Kavität

$$D_0 := N \frac{w_{21} - w_{12}}{w_{21} + w_{12}}$$

$\mathrel{\hat=}$ Pumprate

$$T_1 := \frac{1}{w_{21} + w_{12}}$$

Zeitkonstante der Relaxation von D_0 auf D

$\mathrel{\hat=}$ Lebensdauer der Elektronen

2.1.1. Stationäre Lösungen (ohne spon. Emission)

$$\frac{dD}{dt} = 0 \implies D_0 - D = 2TWDS \qquad (1)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = (WD - 2k)S$$

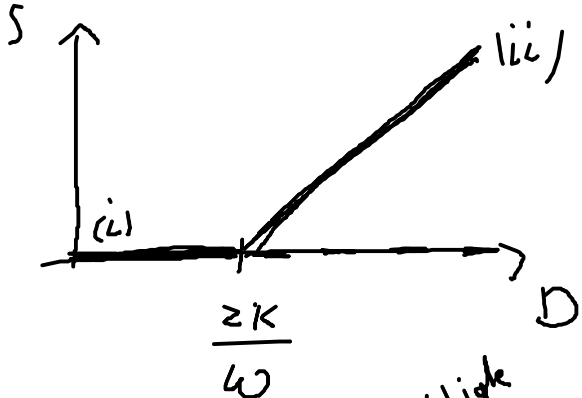
$\Rightarrow$ 2 Lösungen

(i) $S = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} D = D_0$

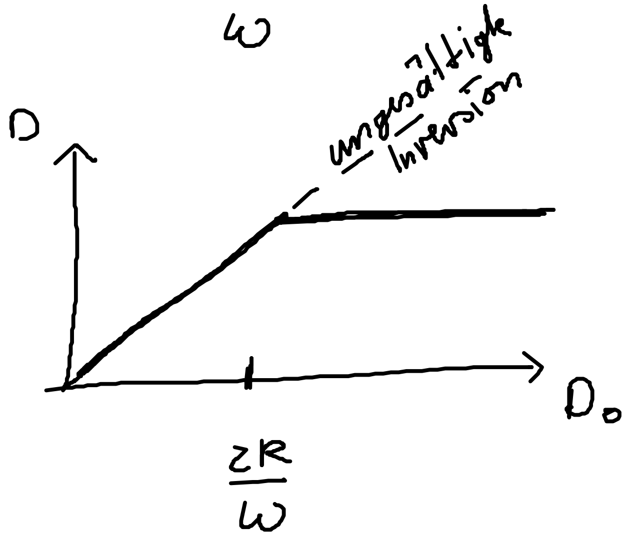
(ii) $S \neq 0,\ D = \frac{2k}{W} \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$S = \frac{\frac{D_0}{D} - 1}{2TW} = \frac{D_0 W - 2k}{4kTW}$$

Lasertätigkeit für $D_0 > \frac{2k}{W}$



$D_0 \mathrel{\hat{=}}$ Pumpstärke
Kontrollparameter



Sättigung der Inversion:
(gain clamping)

$\uparrow$

Laserschwelle $D_0 = \frac{2k}{W}$

effektiven Pump Parameter

$$p = \frac{W}{2k} D_0$$

$\rho < 1$: keine Lasertätigkeit
$\rho \geq 1$: Lasertätigkeit

- Stabilität der stationären Lösungen (gegenüber kleinen Störungen)

(i) $S^* = 0$, $D^* = D_0$

$$S(t) = S^* + \delta S(t)$$
$$D(t) = D^* + \delta D(t)$$

$\Rightarrow$ eingesetzt in Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt}\delta D = \frac{D_0 - D^* - \delta D}{T_1} - 2W(D^* + \delta D)(S^* + \delta S)$$
$$\overset{\binom{S^*=0}{D^*=D_0}}{\approx} -\frac{\delta D}{T} - 2WD^*\delta S$$

- quadratische Terme der Störungen vernachlässigt

$$\frac{d}{dt}\delta S \approx WD^*\delta S - 2k\delta S$$

kompakt:
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\delta D\\ \delta S\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & -2WD_0 \\ 0 & WD_0 - 2k\end{pmatrix}}_{\text{Jakobi-Matrix des dyn. Systems am Fixpunkt}}\begin{pmatrix}\delta D\\ \delta S\end{pmatrix} \quad (2)$$

<u>allgemein</u>: $\dot{\underline{q}} = \underline{F}(\underline{q}, k)$

$q = (q_1, .., q_n)$ dyn. Variablen

$\underline{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ nichtlin. Funktion

k Kontrollparam

$$\delta\dot{q}_i = \underbrace{F_i(\underline{q}^*, k)}_{0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial q_j}\bigg|_{\underline{q}^*} \delta q_j \equiv \sum_j A_{ij} \delta q_j$$

Lösungsansatz $\begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} \sim e^{\lambda t}$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} -\frac{1}{T} - \lambda & -2WD_0 \\ 0 & WD_0 - 2k - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} = 0$$

Eigenwertgleichung für Jakobimatrix

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} - \lambda & -2WD_0 \\ 0 & WD_0 - 2k - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$0 \overset{!}{=} \lambda^2 - \lambda \,\mathrm{tr} A + \det A$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{T}\right)(\lambda - WD_0 + 2k)$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -\frac{1}{T_1} < 0$ stets

$$\lambda_2 = WD_0 - 2k \quad \begin{matrix} < 0 & \text{falls } D_0 < \frac{2k}{W} \\ > 0 & \text{"} \quad D_0 > \frac{2k}{W} \end{matrix}$$

- der stationäre Zustand $\underline{q}^*$ ist <u>lokal</u> asymp<u>totisch</u> stabil

Hinreichende Bedingung: $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ für alle EW

(NB.: Für $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ müssen die nichtlinearen Terme hinzugezogen werden)

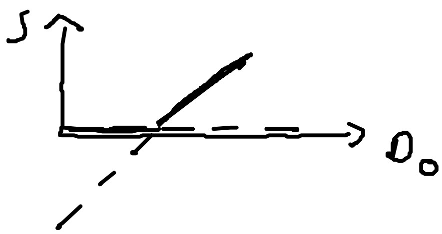
allg. Lösung: $\delta \underline{q}(t) = c_1 \underline{\eta}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \underline{\eta}_2 e^{\lambda_2 t}$

$\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2$: Eigenvektoren

c_1, c_2: Konstanten

An der Laserschwelle $D_0 = \frac{2k}{w}$ verzweigt sich also die stationäre Lösung, und die Stabilität wechselt:

Bifurkation



- kann nur in nichtlinearen dyn. Systemen auftreten
- an der Laserschwelle ändert sich das Verhalten des Systems qualitativ

Nichtgleichgewichts-Phasenübergang

fern vom thermodyn. GG
(GG gegeben durch Boltzman Verteilung der atomaren Besetzung $\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{(E_2-E_1)}{kT}} < 1$

$$D = N_2 - N_1 < 0$$

Der Ordnungs-Parameter S ändert sich bei Erhöhung des Kontrollparameters D_0 stetig, aber nicht diff.bar

$\Rightarrow$ Phasenübergang 2. Ordnung

2.1.2. stationäre Lösung mit spontaner Emission

Unterhalb der Schwelle: stimulierte Emission kann gegen spontane Em. vernachlässigt werden

Bilanzgl. $\longrightarrow$

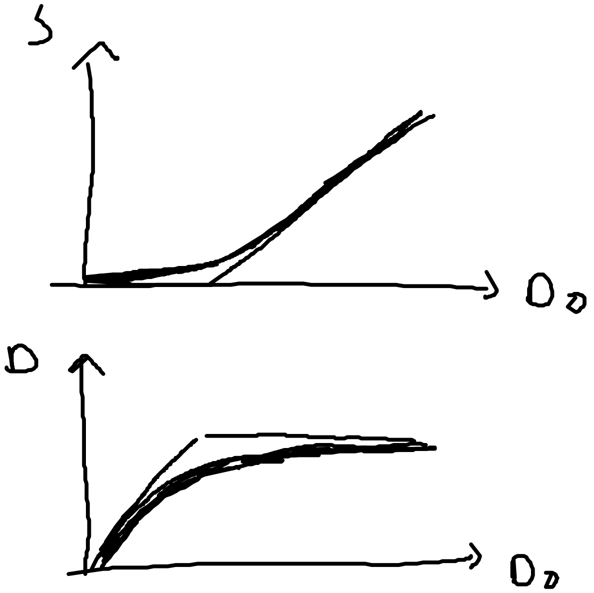
$$D_0 - D \approx T_1 \frac{W}{V} (N + D)$$

$$D \approx \frac{D_0 - T\frac{W}{V} N}{1 + T\frac{W}{V}} < D_0 < \frac{2k}{W}$$

$$S \approx \underline{\frac{W}{2\kappa}(N + D)} \approx \underline{\frac{W}{V}(N + D_0)}$$

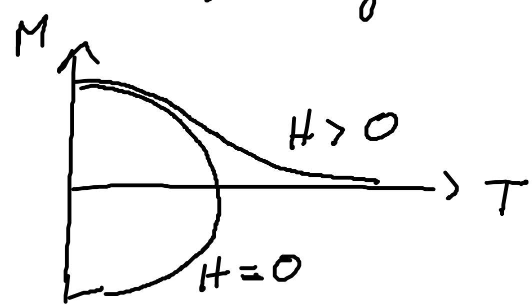
$2k - WD \qquad 4k\left(1 + \frac{TW}{\nu}\right)$

wächst mit D_0



- es existiert für alle D_0 ein eindeutiger, stabiler stationärer Zustand

- Der Phasenübergang 2. Ordnung wird durch die spontane Emission zerstört
  (vgl. die Wirkung eines Magnetfeldes H beim Ferromagneten)



2.1.3. Relaxationsoszillationen

(Stabilität des zweiten Fixpunktes mit $S \neq 0$)

- spontane Emission vernachlässigt
- oberhalb der Schwelle $D_0 > \frac{2k}{W}$

  also $P > 1$

- Jacobi-Matrix am Fixpunkt (ii) mit $S \neq 0$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T} - 2WS^* & -2WD^* \\ WS^* & WD^* - 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{P}{T_1} & -4k \\ \frac{2k(P-1)}{4kT_1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix}$$

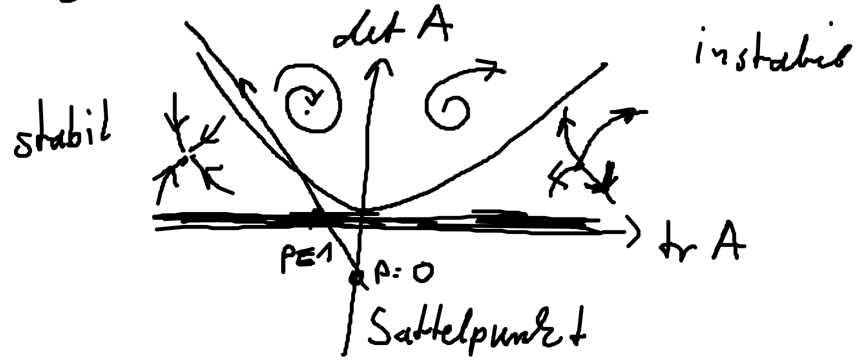
Säkulargleichung:

$$\lambda^2 - \lambda \,\mathrm{tr}\, A + \det A = 0$$

$$P = \frac{W}{2k} D_0$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tr}\, A &= -\frac{P}{T_1} < 0 \\ \det A &= \frac{2k(P-1)}{T_1} > 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } P > 1$$

<u>Bem.</u> $\mathrm{tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ $\Rightarrow$ Stabilität
$\det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$



$\Rightarrow$ Fixpunkt ist stabil oberhalb der Schwelle

• 2 Fälle möglich für Eigenwert (EW

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}\,A \pm \sqrt{(\mathrm{tr}\,A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

(i) EW imaginär (ii) EW reell

(i) $\det A > 0$, $\mathrm{tr}\,A < 0$, $\mathrm{tr}\,A^2 < 4 \det A$

$$\lambda_{1,2} = -\Gamma \pm i\omega$$ komplex konjugiert

$-\Gamma = \mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$

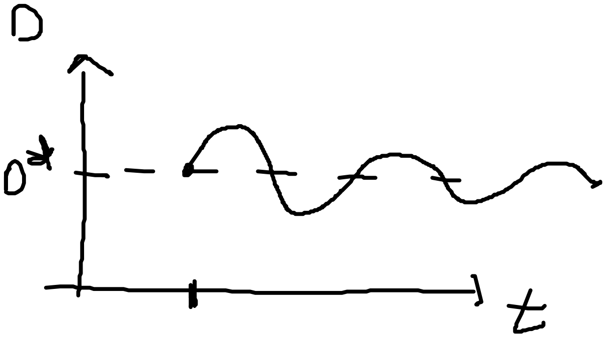
mit $\Gamma = -\frac{\mathrm{tr}A}{2} = \frac{p}{T_1}$ Dämpfungskonstante Γ

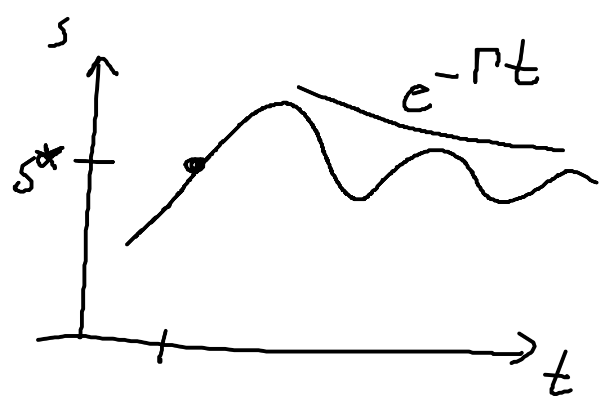
$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8k}{T_1}(p-1) - \frac{p^2}{T_1^2}}$$

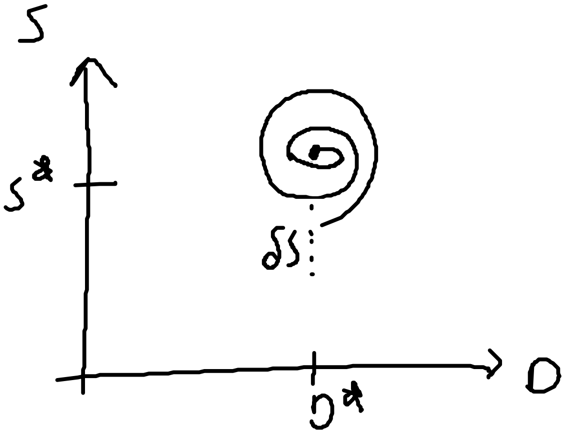
ω: Oszillationsfrequenz

$$\begin{pmatrix} \delta D \\ \delta S \end{pmatrix} = c_1 \underline{\eta}_1 e^{(-\Gamma + i\omega)t} + c_2 \underline{\eta}_2 e^{(-\Gamma - i\omega)t}$$

gedämpfte Oszillationen: Relaxationsoszillationen







stabiler Fokus:

- Strudelpunkt
- Trajektorien sind Spiralen

Hausaufgabe:

Welche Trafo führt auf

$$\frac{dI}{dt} = I(D-1)$$

$$\frac{dD}{dt} = \mu\left(P - D(1+I)\right)$$

?