

2.4. Vielmoden - Laser

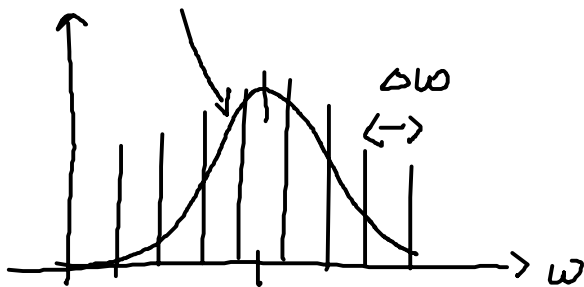
Bisher: Laseremission in einer Mode

Aber: Laseremission kann in alle Resonanzmoden erfolgen die innerhalb
der atomaren Linienbreite (Gaslaser)
des Gain-Spektrums (HL Laser)
liegen

$$\text{Modenabstand } \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2nL}$$

$$\text{Modenfrequenz } \omega_\lambda$$

Gain Spektrum



$\bar{\omega}$ - Übergangsfrequenz im Atom

2.4.1 Mechanismen der Linienverbreiterung

(a) Homogene Verbreiterung (unabhängig vom Ort)

(1) Natürliche Linienbreite γ_0

- endliche Lebensdauer
Zerfallskonstante des atomaren Übergangs
- heruleiten aus WW des

Atome mit Vakuum-Resonatormedium

- klassisch beschreibbar durch gedämpften, getriebenen Oszillator

$$\ddot{\underline{p}}_{\mu} + 2\gamma\omega_0 \dot{\underline{p}}_{\mu} + \bar{\omega}_0^2 \underline{p}_{\mu} = \frac{e^2}{m} \underline{E}_0 e^{-i\omega_{\lambda} t}$$

el. Dipolmoment des Atoms μ

Laserfeld mit Amplitude \underline{E}_0 und Frequenz ω_{λ}

Lösung:
$$\underline{p}_{\mu} = \frac{e^2/m}{\bar{\omega}_0^2 - \omega_{\lambda}^2 - i2\gamma\omega_0\omega_{\lambda}} \underline{E}_0 e^{-i\omega_{\lambda} t}$$

komplexe atomare Suszeptibilität $\chi(\omega) \hat{=} \text{Polarisierbarkeit}$

$$\underline{p}(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \underline{E}(\omega)$$

makroskopische Polarisation: $\underline{P} = \sum_{\mu} \underline{p}_{\mu}$

Resonanzapproximation:
$$\left[\begin{array}{l} \bar{\omega}_0^2 - \omega_{\lambda}^2 \approx \\ 2\omega_{\lambda}(\bar{\omega}_0 - \omega_{\lambda}) \end{array} \right]$$

d.h. $(\bar{\omega}_0 - \omega_{\lambda})^2 \approx 0$

$$\Rightarrow \chi_{at}(\omega_\lambda) \approx \frac{e^2}{2\omega_\lambda m} \frac{1}{\bar{\omega}_0 - \omega_\lambda - i\gamma_0}$$

$\hat{=}$ Fouriertransformierte des
atomaren Zerfalls $e^{-\gamma_0 t}$

$$\epsilon_0 \text{Im} \chi_{at}(\omega_\lambda) \sim \frac{\gamma_0}{\gamma_0^2 + (\bar{\omega}_0 - \omega_\lambda)^2} \quad \frac{\text{Lorentz}}{\text{Linie}}!$$

Halbwertsbreite γ_0

(2) Stoßverbreiterung $\frac{1}{T_2}$

$\hat{=}$ Phasengedächtnis $\hat{=}$ dephasing time T_2

- Zerfall der makroskopischen Polarisation durch
Stöße der Atome/Elektronen untereinander

- Inkohärente Oszillation der Dipole

$$P = \sum_{\mu} p_{\mu} = N p_{\mu}$$

mit Stößen: Zerfall von P auch wenn p_{μ} ungedämpft

\rightarrow gesamte Linienbreite

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{1}{T_2}$$

Mechanismus der Stoßverbreiterung

Gaslaser

- abhängig vom Druck $T_2 \sim 10^{-8} - 10^{-9}$ s

Festkörperlaser

- homogene Phononenverbreiterung
- Fluktuationen des Gitters
 - Verschiebung der atomaren Energieniveaus

HL-Laser

- Coulombs WW
- Elektron-Elektron stöße (Intraband stöße)

$$T_2 \sim 10^{-12} \text{ s}$$

(b) inhomogene Verbreiterung

- Atome unterscheidbar - $\bar{\omega}$ hängt vom Ort des Atoms ab: $\bar{\omega}_\mu$
- atomare Frequenzen $\bar{\omega}_\mu$ statistisch verteilt

Physikalische Ursachen

Gaslaser : Dopplerverbreiterung durch thermische Bewegung (Dopplerverschiebung)

$$\bar{\omega}_+ = \bar{\omega}_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

→ Gauß Linienform

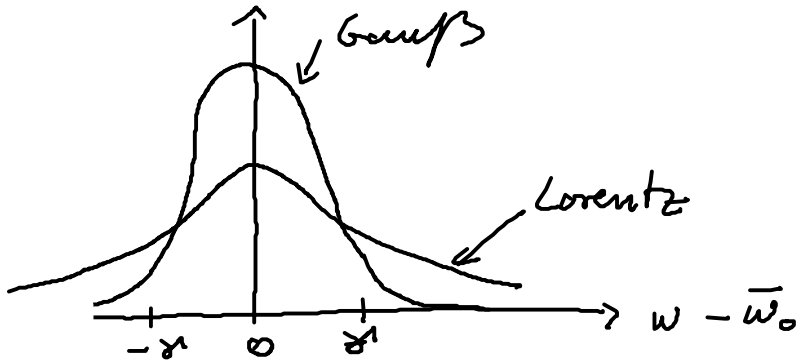
(zentraler Grenzwertsatz für statistisch unabh. Ereignisse)

Festkörperlaser

- inhomogene Gitterverbreiterung

Quantenpunkt-Laser (HL Laser . Emission kommt aus 0-dim. Strukturen)

- Größenvariation der Quantenpunkte
 - > Gaußverteilung der Tiefe der Quantenkörper
 - > Gaußverteilung der Übergangsfreq



2.4.2. Bilanzgleichungen im Vielmodenfall

strahlende Übergangswahrscheinlichkeit

$$W_{\lambda\mu} = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\bar{\omega}_\mu - \omega_\lambda)^2} |g_{\lambda\mu}|^2 \quad \text{mit}$$

Kopplungskonstanten

$$g_{\lambda\mu} := i p_\mu \epsilon_\lambda u_\lambda(x_\mu) \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\epsilon_0 \tau_1}}$$

aus Störungstheorie 1. Ordnung
mit Störoperator $H_1 \sim p_\mu \epsilon_\lambda u_\lambda(x)$

↑
 Dipolmoment
 ↑
 Polarisation der Mode
 ↑
 Feldamp. der Mode λ

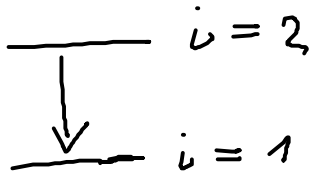
$$W_{ij} = \frac{2\pi}{\tau_1} |M_{if}|^2 \sqrt{E_f - E_i}$$

$$M_{if} = \langle f | H_1 | i \rangle$$

↑ final-
state
↑ initial-
state

Ensemble aus 2 Niveaus Systemen

dynamische Größen:



$f_{i\mu}$ Besetzungswahrscheinlichkeit
des Atoms μ im Zustand i

$$d_{\mu} = f_{2\mu} - f_{1\mu} \quad \text{Inversion eines Atoms}$$

S_{λ} Photonenzahl in Mode λ

Bilanzgl. aufstellen wie in 1.2. (GL I, II)

$$\frac{d f_{2\mu}}{dt} = \omega_{21} f_{1\mu} - \omega_{12} f_{2\mu} - \underbrace{d_{\mu} \sum_{\lambda} S_{\lambda} \omega_{\lambda\mu}}_{\text{Gewinn}} - \underbrace{f_{2\mu} \sum_{\lambda} \omega_{\lambda\mu}}_{\text{sp. Em.}}$$

$$\frac{d f_{1\mu}}{dt} = - \frac{d f_{2\mu}}{dt} \quad \text{da} \quad f_{1\mu} + f_{2\mu} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} d_{\mu} = \frac{d_0 - d_{\mu}}{T} - 2 d_{\mu} \sum_{\lambda} S_{\lambda} \omega_{\lambda\mu} - (1 + d_{\mu}) \sum_{\lambda} \omega_{\lambda\mu}}$$

Pumpstärke: $d_0 = \frac{\omega_{21} - \omega_{12}}{\omega_{21} + \omega_{12}}$

Lebensdauer $T = \frac{1}{\omega_{21} + \omega_{12}}$

$$\frac{d}{dt} S_\lambda = S_\lambda \sum_{\mu} \omega_{\lambda\mu} d_\mu - 2K_\lambda S_\lambda + \frac{1}{2} \sum_{\mu} (1 + d_\mu) \omega_{\lambda\mu}$$

- dies sind $\sum_{\lambda} + \sum_{\mu}$ gekoppelte DGL's
- Bem.: Halbleit Laser
Besetzung in jedem k -Zustand $\hat{=} S_\mu$

2.4.3. Lochbrennung

Stationärer Zustand (ohne spont. Emission)
 $d_0 \leftarrow$ Pumpstärke

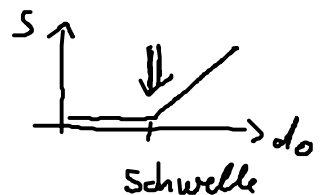
$$d_\mu = \frac{d_0}{1 + 2T \sum_{\lambda} S_\lambda \omega_{\lambda\mu}}$$

Annahme: ① Laserbetrieb nur wenig oberhalb der Schwelle

$$S_\lambda \ll \frac{1}{T \omega_{\lambda\mu}}$$

Taylor

$$d_\mu \approx d_0 \left(1 - 2T \sum_{\lambda} S_\lambda \omega_{\lambda\mu} \right)$$



② nur eine Mode λ im Resonator $\left(\begin{matrix} S_\lambda = 0 \\ \lambda \neq \lambda \end{matrix} \right)$

$$\Rightarrow d_\mu \approx d_0 (1 - 2T S_\lambda(\omega_{\lambda\mu}))$$

Photonendichte \downarrow Feld \downarrow

$$\left[\begin{matrix} S_\lambda \sim |E_\lambda|^2 \\ E_\lambda = \underline{e}_\lambda u_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} \end{matrix} \right]$$

a) Spektrales Lochbrennen

Betrachte : laufende Laserwelle : $u_\lambda(x) \sim e^{ik_\lambda x}$

$$\Rightarrow |u_\lambda(x)|^2 = \text{const}$$

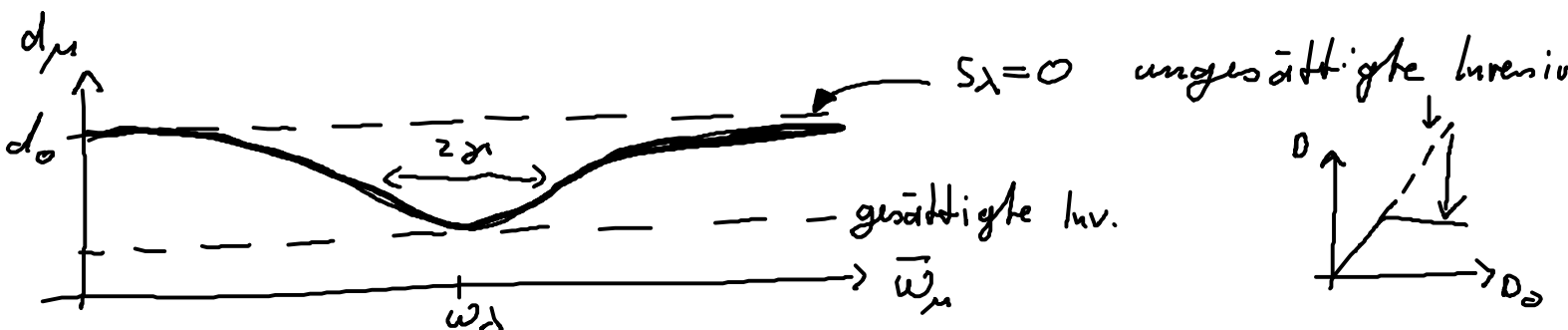
$$\Rightarrow |g_{\lambda\mu}|^2 \text{ ortsunabhängig}$$

$\omega_{\lambda\mu}$ in $\otimes \Rightarrow$

$$d_\mu(\bar{\omega}_\lambda) \approx d_0 \left(1 - 2T S_\lambda \frac{2\gamma |g_{\lambda\mu}|^2}{\gamma^2 + (\bar{\omega}_\mu - \omega_\lambda)^2} \right)$$

Betrachte inhomogen verbreiterte Linie :

$\bar{\omega}_\mu$ hängt von μ ab
(jedes Atom hat anderes $\bar{\omega}$)



Ladentrennung in die Linie der Inversion der einzelnen Atome

Photonengleichung:

stationärer Zustand: $0 = \left(\sum_{\mu} \omega_{\lambda\mu} d_{\mu} - 2R_{\lambda} \right) S_{\lambda}$

Kontinuumsnäherung für Atome

Transformiere $\sum_{\mu} \rightarrow \int d\bar{\omega}$

\uparrow alle Atome \uparrow alle Frequenzen

$$d_{\mu}(\bar{\omega}_{\mu}) \rightarrow d(\bar{\omega})$$

Zahl der Atome mit Übergangsfrequenz im
Intervall $(\bar{\omega}, \bar{\omega} + d\bar{\omega})$:

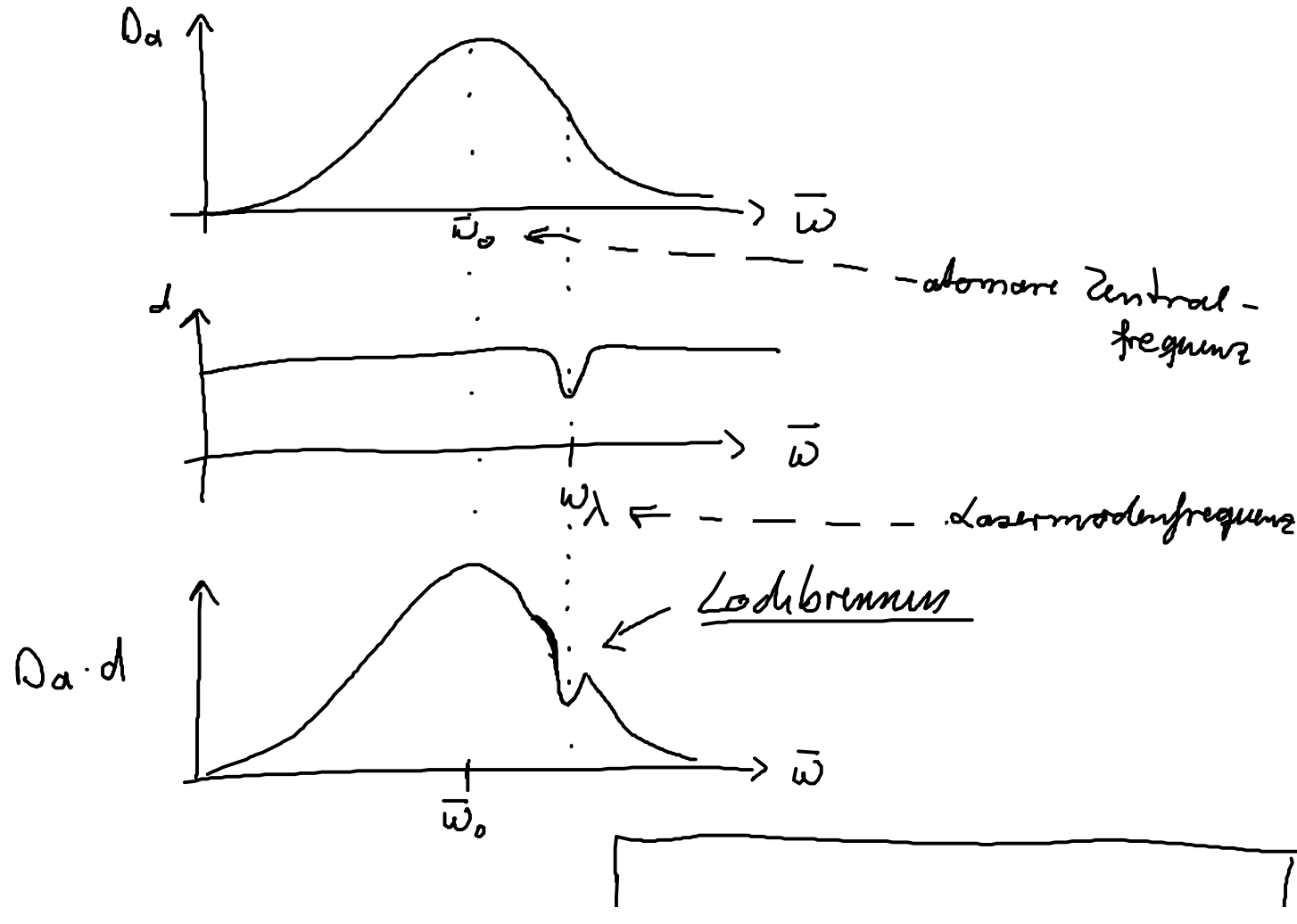
$$\boxed{D_a(\bar{\omega}) d\bar{\omega}}$$

\uparrow
atomare "Zustandsdichte" $D_a(\bar{\omega})$

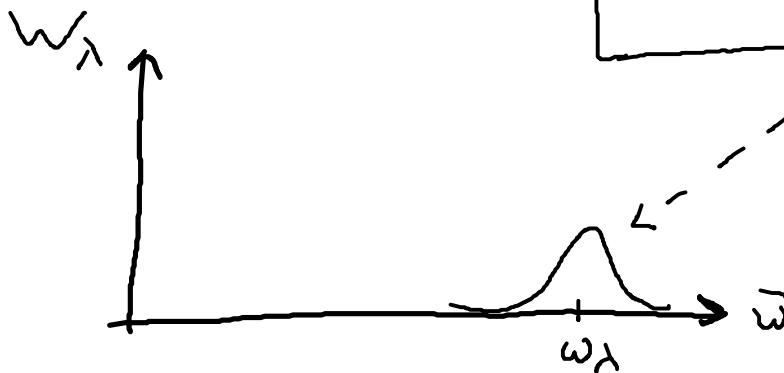
$$\sum_{\mu} \omega_{\lambda\mu} d_{\mu} \rightarrow \int \omega_{\lambda}(\bar{\omega}) \underbrace{D_a(\bar{\omega}) d(\bar{\omega})}_{d\bar{\omega}}$$

≙ spektraler Gain

z.B. Gaußverteilung der atomaren Zustandsdichte D_a



Bem: durch schnelle
Relaxationsprozesse im
HL wird das Loch
wieder gefüllt
 \Rightarrow Annahme einer Fermivert.
im Band gerechtfertigt



$W_\lambda(\bar{\omega})$ projiziert aus
 $D_\alpha \cdot d$ die Umgebung
von ω_λ heraus!

\rightarrow Spektrealer Gewinn " $W_\lambda \cdot D_\alpha \cdot d$ " ist am größten
für diejenige Mode, die am nächsten bei der
atomaren Zentralfrequenz $\bar{\omega}_0$ liegt

\Rightarrow Gewinn am höchsten für Mode im Gain Maximum!