3.4. Stationäre Lösungen der Laser - grundgleichungen im Ein-Moden-Betrieb

· betrachte eine Mode λ der Frequenz ω

· inhomogen verbreiterte Linie, d.h. $\bar{\omega}_n$ von n abhängig

$\uparrow$ nummeriert Atome

Grundgleichungen

(I) $\dot{a} = (-i\omega - \kappa) a - i \sum_n g_{\lambda n}^* p_n$: Feldgleichung

$E^+ = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}}\, a$

(II) $\dot{p}_n = (-i\bar{\omega}_n - \gamma) p_n + i g_{\lambda n} d_n a$: Polarisation

(III) $\dot{d}_n = \frac{d_0 - d_n}{T} + 2i \left(g_{\lambda n}^* p_n a - g_{\lambda n} p_n^* a \right)$: Inversion

Stationäre Lösungen

(i) $a = 0$ $\leftarrow$ spon. Emission in der semiklass. Theorie nicht beschreibbar

$p_n = 0$ kein Laserbetrieb

$d_n = d_0$ (unterhalb der Schwelle)

(Ableitung Null)

(ii) Ansatz für stationäre Schwingungen des Lichtfeldes

$a(t) = \underline{\underline{\mathcal{E}}}^{ss}\, e^{-i\underline{\underline{\Omega}} t}$ Ω Laserfrequenz

(Amplitude $\mathcal{E}^{ss}$ und damit die Intensität sind konstant)

$$p_n(t) = \underline{\underline{p_n^{ss}}}\, e^{-i\Omega t}$$

$$d_n = \underline{\underline{d_n^{ss}}} = const$$

(Ableitung α nicht Null aber $\dot{\mathcal{E}}^{ss} = 0$)

$\mathcal{E}^{ss}$, Ω und p_n^{ss} müssen noch bestimmt werden

Einsetzen in (I–III)

$$\dot{\alpha} = -i\Omega\alpha$$
$$\dot{p}_n = -i\Omega p_n$$

$$\mathrm{I}': \quad 0 = [i(\Omega - \omega) - \kappa]\, \mathcal{E}^{ss} - i \sum_n g_{\lambda n}^{*}\, p_n^{ss}$$

$$\mathrm{II}': \quad 0 = [i(\Omega - \bar{\omega}_n) - \gamma]\, p_n^{ss} - i g_{\lambda n}\, d_n^{ss}\, \mathcal{E}^{ss}$$

$$\mathrm{III}': \quad 0 = \frac{d_0 - d_n^{ss}}{T} + 2i\left(g_{\lambda n}^{*}\, p_n^{ss}\, \mathcal{E}^{ss\,*} - c.c. \right)$$

$$\mathrm{II}' \Rightarrow \boxed{p_n^{ss} = \frac{-i g_{\lambda n}\, d_n^{ss}\, \mathcal{E}^{ss}}{i(\Omega - \bar{\omega}_n) - \gamma} = \frac{-g_{\lambda n}\, d_n^{ss}\, \mathcal{E}^{ss}}{\Omega - \bar{\omega}_n + i\gamma}}$$

Polarisation

p_n^{ss} einsetzen in III':

$$0 = \frac{d_0 - d_n^{ss}}{T} - 2i \left(\frac{|g_{\lambda n}|^2 |\mathcal{E}^{ss}|^2 d_n^{ss}}{(\Omega - \bar{\omega}_n) + i\gamma} - c.c. \right)$$

$$= \frac{d_0 - d_n^{ss}}{T} - 2 d_n^{ss} |\mathcal{E}^{ss}|^2 \underbrace{|g_{\lambda n}|^2 \frac{2\gamma}{(\Omega - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma^2}}_{W_{\lambda n}}$$

- Einstein-Koeffizient der induzierten Emission
- jetzt hergeleitet
- neu: Laserfrequenz Ω kann abweichen von ω_λ

$$\Rightarrow \boxed{d_n^{ss} = \frac{d_0}{1 + 2T W_{\lambda n} |\mathcal{E}^{ss}|^2}}$$

entspricht genau der stationären Bilanzgleichung mit Photonenzahl $s_\lambda = |\mathcal{E}^{ss}|^2$

$\left.\begin{matrix} p_n^{ss} \\ d_n^{ss} \end{matrix}\right\}$ einsetzen in I':

$$\left[i(\Omega - \omega) - \kappa + i \sum_n \frac{|g_{\lambda n}|^2}{\Omega - \bar{\omega}_n + i\gamma} d_n^{ss} \right] \mathcal{E}^{ss} = 0$$

separiert nach Real- und Imaginärteil

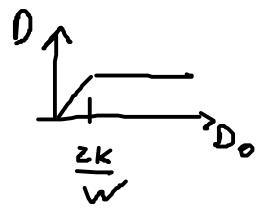
$$\mathrm{Im}: \quad \left[\Omega - \omega + \sum_n |g_{\lambda n}|^2 \frac{\Omega - \bar{\omega}_n}{(\Omega-\bar{\omega}_n)^2 + \gamma_\perp^2} d_n^{ss}\right] \mathcal{E}^{ss} = 0$$

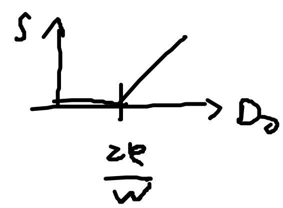
$$\mathrm{Re}: \quad \boxed{\left[-\kappa + \sum_n |g_{\lambda n}|^2 \frac{\gamma_\perp}{(\Omega-\bar{\omega}_n)^2 + \gamma_\perp^2} d_n^{ss}\right] \mathcal{E}^{ss} = 0}$$

$\Uparrow$ entspricht der stationären Bilanzgleichung der Photonen

$$\mathrm{Re}: \quad \left[-\kappa + \sum_n \frac{1}{2} W_{\lambda n} d_n^{ss}\right] \mathcal{E}^{ss} = 0$$

$\Rightarrow$ Lösungen wie in 2.1.





• der Imaginärteil liefert zusätzlich die Laserfrequenz Ω

a) <u>homogene Linienbreite</u> ($\bar{\omega}_n = \bar{\omega}$ hängt nicht von n ab)

$$\omega - \Omega = -\frac{\bar{\omega} - \Omega}{2\gamma_\perp} d_0 \underbrace{\sum_n \frac{W_{\lambda n}(\Omega)}{1 + 2T W_{\lambda n} |\mathcal{E}^{ss}|^2}}$$

$= 2\kappa$ wegen Re: Gleichg von I' und d_n^{ss}

$$\Rightarrow \quad \omega + \tilde{\omega}\frac{\kappa}{\gamma_\perp} = \Omega\left(1 + \frac{\kappa}{\gamma_\perp}\right)$$

$$\boxed{\Omega = \omega \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp + \kappa} + \tilde{\omega}\frac{\kappa}{\gamma_\perp + \kappa}}$$

- Die Modenfrequenz des leeren Resonators ω wird durch WW zwischen Licht und Materie zu Ω verschoben

- Verschiebung wächst wenn κ auf gleicher Größenskala wie $\gamma_\perp = \gamma_{\perp 0} + \frac{1}{T_2}$

falls $\gamma_\perp \gg \kappa$ "Photonen leben länger als Polarisation"

$\Rightarrow \Omega = \omega$
keine Verschiebung
(Bilanzgleichungsfall)

Erinnerung: beim class B Laser leben Elektronen länger als Photonen

b) inhomogene verbreiterte Linie

- die Frequenzverschiebung $\omega - \Omega$ hängt zusätzlich von Photonenzahl $|\mathcal{E}^{ss}|^2$ ab

→ komplizierte nichtlineare Gleichung für Ω

Stabilität der stationären Lösung (i) $a: p_n^{ss} = 0$

Spezialfall $\bar{\omega}_n = \omega$ (exakte Resonanz)

$g\lambda_n = g$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{a} &= (-i\omega - \kappa)a - ig^* p \\ \dot{p} &= (-i\omega - \gamma)p + ig D\cdot a \\ \dot{D} &= \frac{D_0 - D}{T} + 2i(g^* p a^* - g p^* a) \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{I}'' \\ &\mathrm{II}'' \\ &\mathrm{III}'' \end{aligned}$$

gesamtes Dipolmoment der N Atome $\quad p = \sum_n p_n$

gesamte Inversion $\quad D = \sum_n d_n$

$D_0 = N d_0$

Linearisieren von ($\mathrm{I}'' - \mathrm{III}''$) um (i)

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{a} \\ \delta\dot{p} \\ \delta\dot{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega - \kappa & -ig^* & 0 \\ igD_0 & -i\omega - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -1/T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta p \\ \delta D \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Säkulargleichung für Eigenwerte λ

$$\underbrace{\left[\lambda^2 + \lambda(2i\omega + \kappa + \gamma) + (i\omega + \kappa)(i\omega + \gamma) - |g|^2 D_0\right]}_{\text{gekoppelte Eigenmoden von Dipolmoment und Feldamplitude}} \underbrace{\left(\lambda + \frac{1}{T}\right)}_{\text{Relaxation der Inversion } \lambda = -\frac{1}{T}} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \underbrace{-i\omega}_{\text{Oszillation}} \underbrace{- \frac{\kappa + \gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa - \gamma}{2}\right)^2 + |g|^2 D_0}}_{\text{Dämpfung } (<0) \text{ oder Entdämpfung } (>0)}$$

Der nicht lasende stationäre Zustand ist stabil falls $\mathrm{Re}\, \lambda_{1,2} < 0$

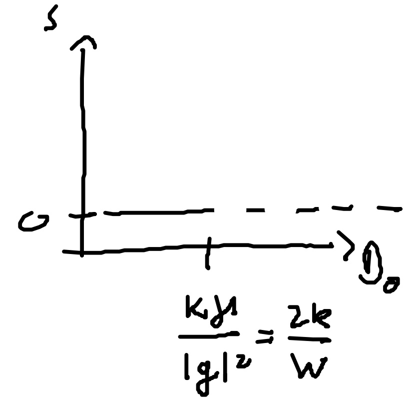
d.h.

$$\frac{\kappa + \gamma}{2} > \sqrt{\left(\frac{\kappa - \gamma}{2}\right)^2 + |g|^2 D_0} \qquad |\cdot(\ )^2$$

$$\kappa\gamma > |g|^2 D_0$$

Pumpstärke

$$\searrow \; D_0 < \frac{\kappa \gamma_1}{|g|^2}$$



Laserschwelle bei $\boxed{D_0 = \frac{\kappa \gamma_1}{|g|^2}}$

Bem: wegen $W_{\lambda n} = |g|^2 \frac{2}{\gamma_1}$ für $\bar{\omega}_n = \omega_\lambda$ ist dies identisch mit Laserschwelle $D_0 = \frac{2\kappa}{W}$ der Bilanzgleichungen

Bem: Stabilitätsanalyse des lasenden Zustands im Prinzip auch möglich (etwas komplexer durch komplexes $\vec{E}$-Feld)

Ergebnis: ① hinter Laserschwelle ist stationäre Schwingung stabil

② für große Pumpstärken gibt es eine 2. Laserschwelle bei der die Stabilität verlorengeht (subkritische Hopf-Bifurkation)

wenn $\kappa > \gamma_1 + \frac{1}{T}$

also für schlechte Resonatoren

3.5. Klassifizierung von Lasern

Klasse	Bedingung	Gleichungen
$\boxed{A}$	$\gamma_\perp \approx \frac{1}{T} \gg \kappa$	1
$\boxed{B}$	$\gamma_\perp \gg \kappa \gtrsim \frac{1}{T}$	2
$\boxed{C}$	$\gamma_\perp \approx \frac{1}{T} \approx \kappa$	3

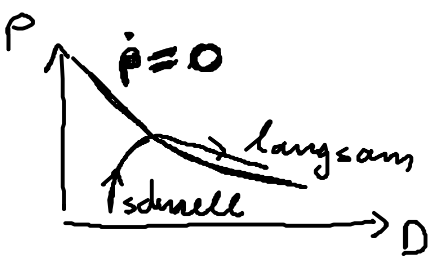
A: $\gamma_\perp \approx \frac{1}{T} \gg \kappa$ — 1

Photonen leben am längsten

$\Rightarrow$ $\dot{P}$ und $\dot{D}$ Gleichungen

können eliminiert werden

B: $\gamma_\perp \gg \kappa \gtrsim \frac{1}{T}$ — 2



Photonen leben kürzer

als Elektronen und

$\dot{P}$ Gleichung kann eliminiert werden

- Relaxationsoszillationen

C: $\gamma_\perp \approx \frac{1}{T} \approx \kappa$ — 3

- alle 3 Gleichungen für gekoppelte Dynamik entscheidend
- es gibt chaotische Lichtemission hinter 2. Laserschwelle

(aequivalente gleichungen
zu Lorenz - Gleichungen)