Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary

2. Übungsblatt – TPVI: Quantensysteme im Nichtgleichgewicht

Abgabe: Fr. 18.05.2012 10:00-12:00, Uhr in der Vorlesung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 4 (20 Punkte): *Drude-Leitfähigkeit*

Wir berechnen die Drude-Leitfähigkeit

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m}\frac{1}{\tau^{-1} - i\omega}. \tag{1}$$

a) Wieso kann man nicht erwarten, die Streurate τ^{-1} (z.B. für Streuung an Störstellen) durch eine direkte Störungsrechnung für $\sigma(\omega)$ zu erhalten?

b) Wir berechnen deshalb $\sigma(\omega) = \frac{e^2}{V}\tilde{\Phi}_{\alpha\beta}(\omega)$ mit Hilfe der über $\tilde{\Phi}(z) = -i\frac{\chi^{\rm th}}{N(z)-z}$ definierten Gedächtnisfunktion $N(z)$, wobei $\tilde{\Phi}_{\alpha\beta}(\omega)$ die Relaxationsfunktion der Geschwindigkeit ist. Hierzu approximieren wir $N(z) \approx -z\tilde{\chi}(z)/\chi^{\rm th}$ wie oben ausgeführt, wobei $\tilde{\chi}(z)$ der retardierte Korrelator einer Geschwindigkeitskomponente $\sum_{\mathbf{k}\sigma} v(\mathbf{k})c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}c_{\mathbf{k}\sigma}$ für den Modell-Hamiltonian

$$H = H_0 + V, \quad H_0 \equiv \sum_{\mathbf{k}\sigma}\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma}c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}c_{\mathbf{k}\sigma} + V, \quad V \equiv \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\sigma} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}c_{\mathbf{k}'\sigma} \tag{2}$$

in zweiter Ordnung Störungstheorie in V ist. Zeige hierzu, dass $[H, A] = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\sigma} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(v(\mathbf{k}') - v(\mathbf{k}))c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}c_{\mathbf{k}'\sigma}$.

c) Berechne den Imaginärteil $\Im N(\omega) \equiv N''(\omega)$. In zweiter Ordnung Störungstheorie in V können hierzu Fermifunktionen $f(\varepsilon_{\mathbf{k}})$ bei der Berechnung der Korrelationsfunktionen der $c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}c_{\mathbf{k}'\sigma}$ angenommen werden. Zeige, dass

$$N''(\omega) = -\frac{\pi m}{N}\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(v(\mathbf{k}') - v(\mathbf{k}))|^2\delta(\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}'} + \varepsilon_{\mathbf{k}})[f(\varepsilon_{\mathbf{k}}) - f(\varepsilon_{\mathbf{k}'})]\frac{1}{\omega}. \tag{3}$$

und damit bei Temperaturen $k_BT \ll E_F$ und Frequenzen $\omega \ll E_F$

$$\tau^{-1} = -N''(0) = \frac{\pi m}{N}\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(v(\mathbf{k}') - v(\mathbf{k}))|^2\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mathbf{k}})\delta(E_F - \varepsilon_{\mathbf{k}}). \tag{4}$$

d) Interpretiere das Ergebnis für τ^{-1} durch Übergangsraten

$$W(\mathbf{k} \to \mathbf{k}') \equiv 2\pi|V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mathbf{k}}) \tag{5}$$

im Sinne von Fermis Goldener Regel. Weiterhin soll angenommen werden, dass durch eine weitere Mittelung über das Potential V (das z.B. durch Unordnung erzeugt wird) das Ergebnis für τ^{-1} nur vom Betrag des *Impulsübertrags* $\mathbf{q} \equiv \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ abhängt, so dass man z.B. in $d = 3$ Dimensionen

$$(v(\mathbf{k}') - v(\mathbf{k}))^2 \to \frac{1}{3m^2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \tag{6}$$

ersetzen darf. Schreibe somit τ^{-1} mit Hilfe der $\mathbf{k}$-abhängigen *Transportrate*

$$\tau_{\mathbf{k}}^{-1} \equiv \sum_{\mathbf{k}'} W(\mathbf{k} \to \mathbf{k}')(1 - \cos\theta). \tag{7}$$

Welche Bedeutung hat der Winkel θ ?

Bitte Rückseite beachten!$\longrightarrow$

Aufgabe 5 (15 Punkte): *The Boltzmann Equation*
Research the Boltzmann equation

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + \mathbf{v}_\mathbf{p} \cdot \nabla_\mathbf{r} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + e\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\mathbf{p} \times \mathbf{B}\right) \cdot \nabla_\mathbf{p} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = I_{\mathbf{r},\mathbf{p},t}\left[f\right]. \tag{8}$$

- Outline the derivation of this equation.
- Linearise Eq. (8) about the equillibrium Fermi-Dirac distribution for small applied electric field (set $\mathbf{B} = 0$).
- Use this result to derive Drude result for the conductivity $\sigma = ne^2\tau/m$. Give an explicit expression for the transport relaxation time τ in terms of scattering rates and compare with the result of Eq. (7), Auf. 4.

Vorlesung:	• Do. 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203. • Fr. 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
Übung:	• Mi. 14–16 Uhr im EW 016 (Clive Emary).
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium. • Schriftliche Arbeit.
Literatur:	• W. Brenig, The statistical theory of Heat, (Springer 1989). • W. Götze and P. Wölfle, Phys. Rev. B **6**, 1226 (1972). • H. Bruus and K. Flensberg, *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics, An Introduction*, Oxford University Press, Oxford 2004. • J. M. Ziman, *Principles of the theory of solids*, Cambridge University Press, Cambridge, 1964. • D. Ferry and S. Goodnick, *Transport in Nanostructures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997