Prof. Dr. Harald Engel
Jakob Löber

# 3. Übungsblatt – Statistische Physik II

**Abgabe: Mi. 09.05.2012 in der Übung**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.*

**Aufgabe 5 (10 Punkte):** *Logistisches Wachstum*

Ein stochastisches Modell für das logistische Wachstum z. B. einer Bakterienpopulation ist

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \lambda(t)\, x(t) - x(t)^2, \\ \lambda(t) &= \lambda + \sigma\zeta(t), \\ \langle \zeta(t) \rangle &= 0, \\ \langle \zeta(t+\tau)\,\zeta(t) \rangle &= \delta(\tau), \\ 0 \leq x(t) &< \infty,\ \sigma > 0. \end{aligned}$$

Gib die stationären Zustände der deterministischen ($\sigma = 0$) Gleichung an. Betrachte auch die Stabilität der stationären Zustände.
Berechne die Lösung der Differentialgleichung für den deterministischen Fall mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Welcher stationäre Zustand wird für $t \to \infty$ erreicht?
Leite nun die Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\left(\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\right)x - x^2\right) P(x,t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma^2 x^2 P(x,t)\right)$$

aus der Langevin-Gleichung für $\sigma > 0$ ab.
Gib die normierte stationäre Lösung $P^0(x)$ der Fokker-Planck-Gleichung bei natürlichen Randbedingungen an. Warum muss $\lambda > 0$ angenommen werden?
Berechne das $n$-te Moment $\langle x^n \rangle$ und gebe $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ explizit an.
Gib den wahrscheinlichsten Wert $\hat{x}$ der stationären Lösung an, d. h. den Wert, bei dem $P^0(x)$ ein Maximum hat.
Vergleiche $\langle x \rangle$ und $\hat{x}$ mit den stationären Zuständen der deterministischen Gleichung und diskutiere das Bifurkationsverhalten für $\hat{x}$ im stochastischen und der stationären Zustände im deterministischen Fall.
Tip:
Die Gammafunktion ist für positive reelle $x$ definiert als

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t)\, \mathrm{d}t$$

und es gilt

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3. Übung TPVI SS12

**Aufgabe 6 (5 Punkte):** *Fokker-Planck-Operator*
Zeige, daß der Fokker-Planck-Operator

$$\hat{L}_{\mathsf{FP}} = -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x)$$

geschrieben werden kann als

$$\hat{L}_{\mathsf{FP}} = \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)}(x) \exp(-\phi(x)) \frac{\partial}{\partial x} \exp(\phi(x)) .$$

Wie muss $\phi(x)$ gewählt werden?
Zeige nun daß $\hat{L}_{\mathsf{FP}}$ bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle W_1(x), W_2(x) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(\phi(x)) W_1(x) W_2(x) \, \mathrm{d}x$$

ein selbstadjungierter Operator ist, daß also gilt

$$\left\langle W_1(x), \hat{L}_{\mathsf{FP}} W_2(x) \right\rangle = \left\langle \hat{L}_{\mathsf{FP}} W_1(x), W_2(x) \right\rangle .$$

Es werden natürliche Randbedingungen angenommen.

## Vorlesung:
Mi um 12:00 Uhr – 14:00 Uhr in ER 164,
Do um 14:00 Uhr – 16:00 Uhr in EW 202.

## Scheinkriterien:
Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).

## Literatur zur Lehrveranstaltung:
Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- L. Arnold: Stochastische Differentialgleichungen
- C. W. Gardiner: Handbook of Stochastic Methods
- H. Haken: Synergetics. Introduction and Advanced Topics
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions
- J. L. Klimontovich: Statistical Physics
- A. S. Mikhailov: Foundations of Synergetics I
- R. L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise

## Sprechzeiten:

| **Name** | **Tag** | **Zeit** | **Raum** | **Tel.** |
|---|---|---|---|---|
| Prof. Harald Engel | Mi | 14:30–16:00 Uhr | EW 738 | 79462 |
| Jakob Löber | Mo | 14:30–16:00 Uhr | EW 737 | 23001 |

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
*http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss12*