Prof. Dr. Harald Engel
Jakob Löber

5. Übungsblatt – Statistische Physik II

Abgabe: Mi. 23.05.2012 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 8 (10 Punkte): *Geneigtes Ratschenpotential*

Löse die Fokker-Planck-Gleichung für die stationäre reduzierte Wahrscheinlichkeitsdichte $\hat{P}(x)$ mit periodischen Randbedingungen

$$\hat{J}_{\text{st}} = -\left(\frac{V'_{\text{eff}}(x)}{\eta} + \frac{1}{\beta\eta}\partial_x\right)\hat{P}(x),$$
$$\hat{P}(x+L) = \hat{P}(x),$$

mit $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Warum ist der Wahrscheinlichkeitsstrom $\hat{J}_{\text{st}}$ unabhängig vom Ort? Benutze

$$V'_{\text{eff}}(x+L) = V'_{\text{eff}}(x).$$

Das Ergebnis ist

$$\hat{P}(x) = \mathcal{N}\exp\left(-\beta V_{\text{eff}}(x)\right)\int_x^{x+L} \mathrm{d}\tilde{x}\exp\left(\beta V_{\text{eff}}(\tilde{x})\right),$$
$$\mathcal{N} = \left(\int_0^L \mathrm{d}x\exp\left(-\beta V_{\text{eff}}(x)\right)\int_x^{x+L}\mathrm{d}\tilde{x}\exp\left(\beta V_{\text{eff}}(\tilde{x})\right)\right)^{-1}.$$

Zeige, daß für den Teilchenstrom $\langle\dot{x}\rangle$ gilt

$$\langle\dot{x}\rangle = L\hat{J}_{\text{st}} = \frac{\mathcal{N}L}{\eta\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{\beta(V_{\text{eff}}(L) - V_{\text{eff}}(0))}\right).$$

Wende die Sattelpunktsapproximation auf $\mathcal{N}$ an, d. h. entwickle $V_{\text{eff}}(x)$ um x_{max} und $V_{\text{eff}}(\tilde{x})$ um x_{min} bis zur 2. Ordnung und erstrecke die Integrale auf $-\infty$ bis ∞. Das Ergebnis ist

$$\mathcal{N} = \frac{\beta}{2\pi}\mathrm{e}^{-\beta(V_{\text{eff}}(x_{\text{max}}) - V_{\text{eff}}(x_{\text{min}}))}\sqrt{-V''_{\text{eff}}(x_{\text{max}})\,V''_{\text{eff}}(x_{\text{min}})}.$$

Berechne nun den Teilchenstrom explizit für $V_{\text{eff}}(x) = V(x) - xF$ mit $V(x) = V_0\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$.

5. Übung TPVI SS12

Aufgabe 9 (5 Punkte): *Verrauschtes Ratschenpotential*
Betrachte die Langevin-Gleichung mit verrauschtem Potential

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -\frac{V'(x(t))}{\eta}\left(1+\sqrt{Q}\zeta_1(t)\right)+\sqrt{\frac{1}{\beta\eta}}\zeta_2(t) \\
&= -\frac{V'(x(t))}{\eta}+\sqrt{\frac{1}{\beta\eta}+Q\left(\frac{V'(x(t))}{\eta}\right)^2}\zeta(t) = -\frac{V'(x(t))}{\eta}+g(x(t))\zeta(t), \\
V'(x) &= V'(x+L), \\
\langle\zeta_i(t)\rangle &= \langle\zeta(t)\rangle = 0, \\
\left\langle\zeta_i(t)\zeta_j(t')\right\rangle &= 2\delta_{i,j}\delta(t-t'),\ i,j=1,2, \\
\left\langle\zeta(t)\zeta(t')\right\rangle &= 2\delta(t-t').
\end{aligned}$$

Wie kommt man von der 1. zur 2. Zeile? Leite die Fokker-Planck-Gleichung für die stationäre reduzierte Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{\mathsf{st}} &= -\frac{V'(x)}{\eta}\hat{P}(x) - g(x)\,\partial_x\left(g(x)\,\hat{P}(x)\right), \\
\hat{P}(x) &= \hat{P}(x+L),
\end{aligned}$$

ab und zeige, daß die Lösung geschrieben werden kann als

$$\hat{P}(x) = \mathcal{N}\frac{\mathsf{e}^{-\phi(x)}}{g(x)}\int\limits_x^{x+L}\mathsf{d}\tilde{x}\frac{\mathsf{e}^{\phi(\tilde{x})}}{g(\tilde{x})}$$

mit

$$\phi(x) = \int\limits_0^x \mathsf{d}\tilde{x}\frac{V'(\tilde{x})}{\eta g(\tilde{x})^2}.$$

Berechne ϕ für

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{\lambda L}x, & 0 \le x < \lambda L, \\ \dfrac{V_0(x-L)}{L(\lambda-1)} & , L\lambda \le x < L, \end{cases}$$

mit $0 < \lambda < 1$. Bestimme die Richtung des Teilchenstroms $\langle\dot{x}\rangle$ in Abhängigkeit von λ.

Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 16. Mai 2012

Prof. Dr. Harald Engel
Jakob Löber

Vorlesung:

Mi um 12:00 Uhr – 14:00 Uhr in ER 164,
Do um 14:00 Uhr – 16:00 Uhr in EW 202.

Scheinkriterien:

Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).

Literatur zur Lehrveranstaltung:

Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- L. Arnold: Stochastische Differentialgleichungen
- C. W. Gardiner: Handbook of Stochastic Methods
- H. Haken: Synergetics. Introduction and Advanced Topics
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions
- J. L. Klimontovich: Statistical Physics
- A. S. Mikhailov: Foundations of Synergetics I
- R. L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Harald Engel	Mi	14:30–16:00 Uhr	EW 738	79462
Jakob Löber	Mo	14:30–16:00 Uhr	EW 737	23001

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss12