Prof. Dr. Harald Engel
Jakob Löber

8. Übungsblatt – Statistische Physik II

Abgabe: Mi. 13.06.2012 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 12 (5 Punkte): *Poissonverteilung und Massenwirkungsgesetz*

Beweise, dass die multivariate Poissonverteilung für die Teilchenzahlen $n_j \in \mathbb{N}$, $n_j \geq 0$

$$p^{\mathrm{eq}}(\mathbf{n}) = \prod_{j=1}^{N_j} \frac{1}{n_j!} (\bar{n}_j)^{n_j} \mathrm{e}^{-\bar{n}_j}$$

eine normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Mittelwert $\bar{n}_k$ und Varianz $\bar{n}_k$ ist, also

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle &= 1, \\ \langle n_k \rangle &= \bar{n}_k, \\ \left\langle n_k^2 \right\rangle - \langle n_k \rangle^2 &= \bar{n}_k. \end{aligned}$$

Zeige, dass aus dem detaillierten Gleichgewicht

$$p^{\mathrm{eq}}(\mathbf{n})\, w_+^{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{c}) = p^{\mathrm{eq}}(\mathbf{n} + \mathbf{v}^{\rho})\, w_-^{\rho}(\mathbf{n} + \mathbf{v}^{\rho}, \mathbf{c})$$

und den Reaktionsraten

$$\begin{aligned} w_+^{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{c}) &= \Omega k_+^{\rho} \prod_{\alpha=1}^{N_\alpha} (c_\alpha \omega_\alpha)^{r_\alpha^\rho} \prod_{j=1}^{N_j} \frac{n_j!}{\left(n_j - p_j^\rho\right)!} \left(\frac{\omega_j}{\Omega}\right)^{p_j^\rho}, \\ w_-^{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{c}) &= \Omega k_-^{\rho} \prod_{\alpha=1}^{N_\alpha} (c_\alpha \omega_\alpha)^{s_\alpha^\rho} \prod_{j=1}^{N_j} \frac{n_j!}{\left(n_j - q_j^\rho\right)!} \left(\frac{\omega_j}{\Omega}\right)^{q_j^\rho} \end{aligned}$$

mit $c_j = \bar{n}_j / \Omega$ das Massenwirkungsgesetz

$$\frac{k_+^\rho}{k_-^\rho} = \frac{\prod_{\alpha=1}^{N_\alpha} (c_\alpha \omega_\alpha)^{s_\alpha^\rho} \prod_{j=1}^{N_j} (c_j \omega_j)^{q_j^\rho}}{\prod_{\alpha=1}^{N_\alpha} (c_\alpha \omega_\alpha)^{r_\alpha^\rho} \prod_{j=1}^{N_j} (c_j \omega_j)^{p_j^\rho}}$$

folgt.

Zeige, dass aus der Großkanonischen Verteilung des klassischen idealen Gases durch Abspuren der inneren Freiheitsgrade (Ort und Impuls) eine Poissonverteilung für die Teilchenzahlen folgt.

Aufgabe 13 (10 Punkte): *Entropieproduktion für ein Brownsches Teilchen*
Ein Brownsches Teilchen sei an 2 Bäder $\rho = 1, 2$ verschiedener Temperatur angekoppelt und wird beschrieben durch die Langevin-Gleichung

$$\dot{v}(t) = -\left(\gamma^{(1)}(t) + \gamma^{(2)}(t)\right) v(t) + \sqrt{2\gamma^{(1)}(t) T^{(1)}}\zeta^{(1)}(t) + \sqrt{2\gamma^{(2)}(t) T^{(2)}}\zeta^{(2)}(t),$$

mit $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$ unkorreliertes Gaußsches Weißes Rauschen der Intensität 1. Schreibe die Langevin-Gleichung in der Form

$$\dot{v}(t) = -\gamma(t) v(t) + \sqrt{2D(t)}\zeta(t) \tag{1}$$

mit $D(t) = \gamma(t) T(t)$ und geeignet bestimmten $\gamma(t)$ und $T(t)$. ζ ist ebenfalls Gaußsches Weißes Rauschen der Intensität 1. Gib den Wahrscheinlichkeitsstrom

$$J^{(\rho)}(v,t) = u^{(\rho)}(v,t) p(v,t) - D^{(\rho)}(v,t) \partial_v p(v,t)$$

für jedes Bad an und identifiziere $u^{(\rho)}(v,t)$ und $D^{(\rho)}(v,t)$. Die entsprechende Fokker-Planck-Gleichung zu Gl. (1) soll mit dem Ansatz

$$p(v,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)}} \exp\left(-\frac{(v - \bar{v}(t))^2}{2\sigma(t)}\right),$$

$$\bar{v}(t) = \langle v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v p(v,t) v,$$

$$\sigma(t) = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 = \langle v^2 \rangle - \bar{v}(t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v p(v,t) v^2 - \langle v \rangle^2$$

gelöst werden. Leite dazu Differentialgleichungen für $\bar{v}(t)$ und $\sigma(t)$ ab und löse diese.
Bestimme die mikroskopische Energie $H(v,t)$ des Systems über die Bedingung der *local detailed balance* (siehe Vorlesung). Zeige, dass der reversiblen Wärmestrom $\dot{Q}^{(\rho)}(t)$ gegeben ist durch

$$\dot{Q}^{(\rho)}(t) = \gamma^{(\rho)}(t) \left(T^{(\rho)} - \langle v^2 \rangle\right), \ \rho = 1, 2.$$

Gib die zeitliche Änderung der Entropie $S(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v \ln p(v,t) p(v,t)$ des Systems sowie die irreversible Entropieproduktion $\dot{S}_i(t)$ an. Berechne jetzt für konstante $\gamma^{(\rho)}(t) = \gamma_\rho$, $\rho = 1, 2$ den Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} \dot{S}_i(t) = \frac{\left(T^{(1)} - T^{(2)}\right)^2 \gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2) T^{(1)} T^{(2)}}.$$

Prof. Dr. Harald Engel
Jakob Löber

Vorlesung:
Mi um 12:00 Uhr – 14:00 Uhr in ER 164,
Do um 14:00 Uhr – 16:00 Uhr in EW 202.

Scheinkriterien:
Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).

Literatur zur Lehrveranstaltung:
Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- L. Arnold: Stochastische Differentialgleichungen
- C. W. Gardiner: Handbook of Stochastic Methods
- H. Haken: Synergetics. Introduction and Advanced Topics
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions
- J. L. Klimontovich: Statistical Physics
- A. S. Mikhailov: Foundations of Synergetics I
- R. L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Harald Engel	Mi	14:30–16:00 Uhr	EW 738	79462
Jakob Löber	Mo	14:30–16:00 Uhr	EW 737	23001

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:
http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss12