Prof. Dr. Sabine Klapp
Dipl. Phys. Arash Azhand
Dipl. Phys. Mathias Hayn
Emely Wiegand

6. Übungsblatt – Thermodynamik & Statistische Physik

Abgabe: Do. 31. 5. 2012 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 2er/3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!

Aufgabe 14 (2 Punkte): *Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung*

Leiten Sie für ein ideales Gas bestehend aus N Teilchen in einem Volumen V die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung $f(\mathbf{v})$ her. Berechnen Sie dazu zuerst die Impulsverteilung $\langle\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\rangle$ für ein Teilchen.

Aufgabe 15 (6 Punkte): *Druckensemble*

In der Vorlesung wurde ausgehend vom mikrokanonischen Ensemble die Verteilungsfunktion für ein System in Kontakt mit einem Wärmebad bzw. einem Wärme- und Teilchenbad abgeleitet. Dies führte auf das kanonische bzw. das großkanonische Ensemble. In dieser Aufgabe sollen Sie die Verteilungsfunktion für ein System in Kontakt mit einem Wärme- und *Volumen*bad aufstellen. Es gibt also zwei System (1 und 2), welche in thermischen Kontakt stehen und welche durch eine bewegliche Wand voneinander getrennt sind. Diese Wand ist für Teilchen der beiden Systeme jedoch nicht durchlässig. Das entsprechende Ensemble wird als Druckensemble bezeichnet.

(a) Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die beiden Teilsysteme 1 und 2? *(0.5 Punkte)*

(b) Wie lautet die mikrokanonische Verteilungsfunktion ρ_{Ges} für das Gesamtsystem bestehend aus beiden Teilsystemen? Wie erhält man die reduzierte Verteilungsfunktion ρ_1 *nur* für das System 1 und wie sieht diese aus? *(1 Punkt)*

(c) Nehmen Sie nun an, dass das System 2 *viel größer* ist, als das System 1. Leiten Sie unter dieser Voraussetzung und mit Hilfe der reduzierten Verteilungsfunktion aus Aufgabenteil (b) die Verteilungsfunktion ρ_{p} für das System 1 her. Gehen Sie dabei analog vor, wie bei der Herleitung des kanonischen und großkanonischen Ensembles in der Vorlesung. Normieren Sie schließlich noch ρ_{p}, so dass der Vorfaktor nicht von Γ_1 und V_1 abhängt. Wie lautet die Zustandssumme Z_{p} in diesem Druckensemble? *(3 Punkte)*

(d) Benutzen Sie die Verteilungsfunktion ρ_{p} um einen allgemeinen Ausdruck für das mittlere Volumen $\langle V\rangle$ und die mittleren Fluktuationen des Volumens $\langle(\Delta V)^2\rangle = \langle V^2\rangle - \langle V\rangle^2$ in einem Druckensemble zu berechnen. Stellen Sie dabei $\langle V\rangle$ durch Z_{p} und $\langle(\Delta V)^2\rangle$ durch die isotherme Kompressibilität $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,N}$ dar. *(1.5 Punkte)*

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 16 (6 Punkte): *Statistischer Operator*

Der statistische Operator $\hat{\rho}$ (auch Dichteoperator oder Dichtematrix) ist ein positiv semidefiniter (Eigenwerte ≥ 0) Operator mit Spur 1. Er charakterisiert den Zustand eines quantenmechanischen Systems und kann allgemein in der Form $\hat{\rho} = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$ geschrieben werden. Hierbei sind $p_i \in [0, 1]$ Gewichte für die nicht notwendigerweise orthonormalen Zustände $\left|\psi_i\right\rangle$. Ein reiner Zustand ist dadurch charakterisiert, dass man den zugehörigen statistischen Operator in der Form $\hat{\rho} = \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|$ schreiben kann.

(a) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}^2\} \leq 1$ erfüllt ist und dass für reine Zustände das Gleichheitszeichen gilt. *(1 Punkt)*

Betrachten Sie die folgenden Operatoren:

$$\hat{\rho}_1 = \left|+\right\rangle \left\langle+\right|, \qquad \hat{\rho}_2 = \frac{1}{2}\left|+\right\rangle \left\langle+\right| + \frac{1}{2}\left|-\right\rangle \left\langle-\right|, \tag{1}$$

$$\hat{\rho}_3 = \frac{7}{8}\left|+\right\rangle \left\langle+\right| + \frac{1}{8}\left|-\right\rangle \left\langle+\right|, \qquad \hat{\rho}_4 = \frac{1}{4}\left|+\right\rangle \left\langle+\right| + \frac{3}{4}\left|-\right\rangle \left\langle-\right|, \tag{2}$$

$$\hat{\rho}_5 = \frac{1}{2}\Big(\left|+\right\rangle \left\langle+\right| - \left|-\right\rangle \left\langle+\right| - \left|+\right\rangle \left\langle-\right| + \left|-\right\rangle \left\langle-\right|\Big). \tag{3}$$

Hier bilden $\left|\pm\right\rangle$ ein vollständiges Orthonormalsystem und bezeichnen die Zustände eines Spin-$1/2$-Teilchens. Außerdem gilt in dieser Basis $\hat{S}_x \left|\pm\right\rangle = \frac{1}{2}\left|\mp\right\rangle$ und $\hat{S}_z \left|\pm\right\rangle = \pm\frac{1}{2}\left|\pm\right\rangle$ bzgl. der Spinoperatoren $\hat{S}_i$.

(b) Welche dieser Operatoren $\hat{\rho}_i$ genügen der Definition eines statistischen Operators? *(0.5 Punkt)*

(c) Welche dieser statistischen Operatoren $\hat{\rho}_i$ beschreiben ein System in einem reinen Zustand? *(1.5 Punkt)*

(d) Berechnen Sie die Mittelwerte $\langle\hat{S}_i\rangle_n = \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}_n\hat{S}_i\}$ und die Fluktuationen $\langle\hat{S}_i^2\rangle_n - \langle\hat{S}_i\rangle_n^2$ bzgl. der statistischen Operatoren $\hat{\rho}_n$ aus Teilaufgabe (b). *(3 Punkte)*