

5. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Donnerstag 30.05.13 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle

Der Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle ist durch den Ricci-Tensor 2. Ordnung folgendermaßen bestimmt

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} (2R_{\mu\nu}^{(2)} - \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}^{(2)}). \quad (1)$$

Für den Ricci-Tensors 2. Ordnung wurde auf dem 4. Übungsblatt gezeigt, dass dieser folgende Abhängigkeit von der Gravitationswelle $h_{\mu\nu}$ besitzt:

$$R_{\mu\kappa}^{(2)} = -\frac{1}{4} (h_{\sigma\kappa,\nu} + h_{\sigma\nu,\kappa} - h_{\kappa\nu,\sigma}) (h_{\mu}^{\sigma,\nu} + h^{\sigma\nu}_{,\mu} - h_{\mu}^{\nu,\sigma}) - \frac{h^{\lambda\nu}}{2} (h_{\lambda\nu,\mu,\kappa} + h_{\mu\kappa,\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - h_{\lambda\kappa,\mu,\nu}). \quad (2)$$

a) Bestimmen Sie nun für die Gravitationswelle mit konstanten Polarisationsensoren $e_{\mu\nu}^{(*)}$

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} e^{-ik_{\lambda} x^{\lambda}} + e_{\mu\nu}^{*} e^{ik_{\lambda} x^{\lambda}} \quad (3)$$

den Ricci-Tensor 2. Ordnung. Die dabei auftretenden oszillierenden Terme der Form $e^{\pm 2ik_{\lambda} x^{\lambda}}$ können vernachlässigt werden. Es ist zu beachten, dass k_{λ} lichtartig ist, und die Eichbedingung $2h^{\nu}_{\mu,\nu} = h^{\nu}_{\nu,\mu}$ gilt, was zu einer erheblichen Vereinfachung der Terme führt.

b) Bestimmen Sie mit diesem Ergebnis und Gleichung (1) den Energie-Impuls-Tensor der Gravitationswelle.

c) Beweisen Sie, dass der so erhaltene Energie-Impuls-Tensor der Gravitationswelle identisch mit dem zur Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{8\kappa} \psi^{ab}{}_{,c} \psi_{ab}{}^{,c} \quad (4)$$

gehörenden kanonischen Energie-Impuls-Tensor

$$t_a{}^b = \psi^{cd}{}_{,a} \frac{\partial L}{\partial \psi^{cd}{}_{,b}} - L \delta_a^b \quad (5)$$

in der Eichung $e_a^a = 0$ ist. Wobei $\psi^{ab} = h^{ab} - h\eta^{ab}$ ist.