

10. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag 11.07.13 vor der Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte): Kanonischer Formalismus der Allgemeinen Relativitätstheorie

(i) Leiten Sie aus der Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = N\sqrt{\gamma}(R^{(3)} - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} + K^2)$ und der zweiten Fundamentalform $K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{\alpha\beta} - 2D_{(\alpha}N_{\beta)})$ die kanonischen Impulse $\pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{\alpha\beta}} = \sqrt{\gamma}(Kh_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta})$ ab.

Beachten Sie, dass N , γ und $R^{(3)}$ nicht Funktion von $K_{\alpha\beta}$ sind. Weiterhin ist es enorm hilfreich anstatt $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{\alpha\beta}}$ den Ausdruck $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial K_{\delta\gamma}}\frac{\partial K_{\delta\gamma}}{\partial\dot{h}_{\alpha\beta}}$ zu berechnen.

(ii) Bestimmen Sie damit die Hamilton-Dichte $\mathcal{H} = \pi_{\alpha\beta}\dot{h}^{\alpha\beta} - \mathcal{L}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Hamiltonsche Formulierung der ART - Friedmann-Robertson-Walker Raumzeiten

Betrachten Sie die Friedmann-Robertson-Walker Raumzeiten

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t)^{(3)}g_{ij}dx^i dx^j \quad (1)$$

und die gewählte Eichung $N = 1$ und $N^j = 0$. Damit ergibt sich

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\gamma} = S^3\sqrt{{}^{(3)}g} \quad (2)$$

worin ${}^{(3)}g = \det({}^{(3)}g_{ij})$ die Determinante der Metrik eines Raumes konstanter Krümmung bezeichnet. Der Krümmungsskalar R ergibt sich dann zu

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{S}}{S} + \left(\frac{\dot{S}}{S} \right)^2 + \frac{k}{S^2} \right). \quad (3)$$

a) Bestimmen Sie die Lagrangedichte für diese Raumzeiten.

Man kann zeigen, dass der 3-Krümmungsskalar für Räume mit konstanter Krümmung k die Gestalt ${}^{(3)}R = -6kS^{-2}$ hat. Benutzen Sie dies um im Ergebnis aus a) den Krümmungsparameter k zu eliminieren.

b) Bestimmen Sie die zweite Fundamentalform K_{ij} für die betrachtete Eichung, welche zu

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial({}^{(3)}g_{ij})}{\partial t} - 2D_{(i}N_{j)} \right) \quad (4)$$

führt, wobei D_i die kovariante Ableitung bzgl. der 3-Raummetrik bezeichnet.

c) Berechnen Sie die Spur der zweiten Fundamentalform, und bestimmen Sie die kanonisch konjugierten Impulse

$$\pi_{\alpha\beta} = \sqrt{\gamma}(Kh_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta}) \quad (5)$$

und deren Spur $\pi = \pi^\alpha_\alpha$ und kontravariante Darstellung $\pi^{\alpha\beta}$.

d) Bestimmen Sie die hamiltonsche Dichte der betrachteten Raumzeitmodelle.