Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
PD Dr. Kathy Lüdge, Judith Lehnert, Andrea Vüllings,
Samuel Brem, Zeynep Cetinkaya, Jurijs Grecenkovs

11. Übungsblatt – Mathematische Methoden

Abgabe: Mo. 01.07.2013 bis 14:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweier- oder Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 31 (4 Punkte): *Arbeit in einem Kraftfeld,* **(mündlich)**

Gegeben sei das Kraftfeld $\underline{F} = (yz, xz, xy)$. Berechnen Sie die verrichtete Arbeit W,

$$W = \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{P}_1} \mathrm{d}\underline{r} \cdot \underline{F},$$

bei einer Bewegung von Punkt $\mathbf{P}_0 = (0,0,0)$ nach $\mathbf{P}_1 = (1,1,1)$ über

(a) den Weg $\underline{r_1}(t) = (t, t, t)$ und

(b) den Weg $\underline{r_2}(t) = (t, t^2, t^2)$.

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse. Was sagt das Ergebnis über das Kraftfeld $\underline{F}$ aus?

(d) Berechne $\nabla \times \underline{F} = \mathrm{rot}(\underline{F})$. Was sagt das Ergebnis über das Kraftfeld $\underline{F}$ aus?

Aufgabe 32 (5 Punkte): *Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten,* **(schriftlich, 3+1+1+1=5 Punkte)**

(a) Stellen Sie den Gradienten, die Divergenz und die Rotation in Kugelkoordinaten dar. Allgemein gilt:

$$\nabla\Phi = \mathrm{grad}(\Phi) = \sum_{i=1}^{3} \underline{e}_{u_i} \frac{1}{g_{u_i}} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i},$$

$$\nabla \cdot \underline{A} = \mathrm{div}(\underline{A}) = \frac{1}{g_{u_1} g_{u_2} g_{u_3}} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{g_{u_1} g_{u_2} g_{u_3}}{g_{u_i}} A_{u_i} \right),$$

$$\nabla \times \underline{A} = \mathrm{rot}(\underline{A}) = \frac{1}{g_{u_1} g_{u_2} g_{u_3}} \begin{vmatrix} g_{u_1}\underline{e}_{u_1} & g_{u_2}\underline{e}_{u_2} & g_{u_3}\underline{e}_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ g_{u_1} A_{u_1} & g_{u_2} A_{u_2} & g_{u_3} A_{u_3} \end{vmatrix},$$

wobei $\Phi = \Phi(u_1, u_2, u_3)$ ein Gradientenfeld, $\underline{A} = (A_{u_1}, A_{u_2}, A_{u_3})^T$ ein Vektorfeld und u_1, u_2, u_3 beliebige krummliniege Koordinaten sind.

(b) Bestimmen Sie nun die Gradienten ∇r und $\nabla f(r)$, einer Funktion $f(r)$, in Kugelkoordinaten mit $r = |\underline{r}|$.

Das Potenzial eines Dipols ist durch $U(r, \vartheta) = \frac{p\cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ gegeben. Hierbei sind p und ϵ_0 Konstanten und ϑ ist der Polarwinkel.

(c) Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E} = -\nabla U$.

(d) Mit welcher Potenz nimmt $|\underline{E}|$ mit dem Abstand vom Dipol ab und für welche Winkel ϑ ist $|\underline{E}|$ minimal bzw. maximal?

Bitte Rückseite beachten! $\longrightarrow$

Aufgabe 33 (3 Punkte): *Kugelvolumen* **(1.5+1.5 schriftlich)**
Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius R_0 in

(a) kartesischen Koordinaten,

(b) Kugelkoordinaten.

Tipp: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \text{arcsin}\frac{x}{a})$

Aufgabe 34 (2 Punkte): *Maxwell-Gleichungen* **(0.5+0.5+0.5+0.5 schriftlich)**
Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum lauten

$$\begin{aligned}
\underline{\nabla} \cdot \underline{E}(\underline{r}, t) &= \frac{\rho(\underline{r}, t)}{\epsilon_0} \\
\underline{\nabla} \cdot \underline{B}(\underline{r}, t) &= 0 \\
\underline{\nabla} \times \underline{E}(\underline{r}, t) &= -\dot{\underline{B}}(\underline{r}, t) \\
\underline{\nabla} \times \underline{B}(\underline{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\underline{j}(\underline{r}, t) + \frac{1}{c^2}\dot{\underline{E}}(\underline{r}, t)
\end{aligned}$$

$\underline{E}$ ist das elektrische Feld, $\underline{B}$ die magnetische Induktion, ρ die Ladungsdichte, $\underline{j}$ die Stromdichte.
ϵ_0 ist die elektrische Feldkonstante und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.
Gegeben sei das elektrische Feld

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = (ctx + 2x^2 - y^2, cty + y^2, ctz - y^2 + 2z^2)^T$$

(a) Berechnen Sie die magnetische Induktion mit der Anfangsbedingung $B(\underline{r}, 0) = 0$,

(b) die Ladungsdichte,

(b) die Stromdichte.

(c) Zeigen Sie $\nabla \cdot \underline{B} = 0$.

Allgemeine Informationen:

- Klausur: 12.07.13, Raum H 0104, Uhrzeit 8:00-10:00
- Aktuelle Informationen werden immer auf der Homepage bekannt gegeben: (*http://www.itp.tu-berlin.de/?mm13*).
- Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. Eckehard Schöll		n.V.	EW 735	23500
PD Dr. Kathy Lüdge	Di	14:00–15:00 Uhr	EW 741	23002
Dipl.-Phys. Judith Lehnert	Do	15:00–16:00 Uhr	ER 246	29048
M. Sc. Andrea Vüllings	Fr	14:00–15:00 Uhr	EW 632	22088
Samuel Brem	Mi	14:00–15:00 Uhr	EW 060	26143
Zeynep Cetinkaya	Fr	11:00–12:00 Uhr	EW 060	26143
Jurijs Grecenkovs	Mi	12:00–13:00 Uhr	EW 060	26143