Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
PD Dr. Kathy Lüdge, Judith Lehnert, Andrea Vüllings,
Samuel Brem, Zeynep Cetinkaya, Jurijs Grecenkovs

9. Übungsblatt – Mathematische Methoden

Abgabe: Mo. 17.06.2013 bis 14:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweier- oder Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

Aufgabe 25 (4 Punkte): *Fouriertransformation* **(mündlich)**

Die Fourier-Transformation bildet eine große Klasse von Funktionen $f(x)$ auf andere Funktionen $g(k)$ ab. Sie bewirkt dabei einen Darstellungswechsel zwischen den Variablen x und k. Anschaulich kann man die Fourier-Transformation als eine Zerlegung der Funktion $f(x)$ in (ebene) Wellen ansehen. Die Funktion $g(k)$ gibt dabei die Amplitude der zur Wellenzahl k gehörenden Welle an. Da ebene Wellen in vielen physikalischen Theorien einfache Lösungen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen sind, findet die Fourier-Transformation zahlreiche Anwendungen.

Die Definition der Fourier-Transformation ist:

$$\hat{f} = g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{wobei} \quad f(x) = \hat{g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \quad .$$

- Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktionen

  (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

  (b) $f(x) = \frac{1}{2a} e^{-a|x|}$ mit $a > 0$.

(c) Zeigen Sie mit dem Ergebnis aus (a) die Integrationsformel: $2\int_0^\infty \frac{\sin k}{k} dk = \pi$.
Tipp: Nutzen Sie die Fourier-Rücktransformation.

(d) Erhält man in beiden Fällen aus der Funktion $g(k)$ durch Rücktransformation wieder die ursprüngliche Funktion $f(x)$?

Aufgabe 26 (4 Punkte): *Wärmeleitung* **(schriftlich)**

Wir betrachten ein einfaches Wärmediffusionssystem. Die Funktion $T(x,t)$ soll die Temperatur eines Gases in einem Rohr der Länge $L = 1$ bezeichnen, dessen Enden auf einer konstanten auf 0 normierten Temperatur gehalten werden. Die Temperatur des Gases verändert sich nun gemäß der Wärmeleitungsgleichung

$$T_t(x,t) - \alpha^2 T_{xx}(x,t) = 0 \,.$$

Hier bezeichnet $\alpha =$ const. die Wärmeleitfähigkeit des Gases.

- Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe des in der Vorlesung behandelten Separationsansatzes, wenn die anfängliche Temperaturverteilung des Gases $T(x,0) = \sin(\pi x)$ befolgt. Zeichnen Sie $T(x)$ für verschiedene Zeiten ($t = 0$, $t_1 > 0$, $t_2 >> t_1$).

- Betrachten Sie jetzt ein unendlich ausgedehntes Rohr, das deltaförmig an einer Stelle auf T_o erhitzt wird (Anfangsbedingung $T(x,0) = T_o \delta(x)$). Lösen Sie die obige Wärmeleitungsgleichung nun mit der Methode der Fouriertransformation und zeichnen Sie die Lösung für verschiedene Zeiten t.

Bitte Rückseite beachten! ⟶

Aufgabe 27 (6 Punkte): *Gaußsches Wellenpaket* **(2+2+1+1 schriftlich)**
Durch die Superposition ebener Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen k und Amplituden $\hat{u}(k)$ kann man zu einem festgelegten Zeitpunkt jede beliebige Funktion im Ortsraum per Fouriertransformation generieren. Besonders einfach sind Wellenfunktionen, die die Form einer Gaußglocke haben. Trotz zeitlicher Ausbreitung ändert sich hier nicht die Form, sondern nur die Breite und der Ort des Maximums. Weiterhin können solche Wellenpakete in der Quantenmechanik benutzt werden, um in einem bestimmten Bereich lokalisierte Teilchen zu beschreiben.

Das eindimensionale Wellenpaket

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk$$

habe zur Zeit $t = 0$ die Form einer Gauß-Glocke $u(x, 0) = Ae^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{ik_0 x}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation, dass die Gewichtsfunktion $\hat{u}(k)$ ebenfalls die Form einer Gauß-Glocke hat, d.h., dass es sich auch im k-Raum um eine lokalisierte Welle handelt. *Hinweis:* Es gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax+d)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$ für alle $a > 0$ und $d \in \mathbb{C}$.

(b) Mit bekannter Gewichtsfunktion $\hat{u}(k)$ und der Dispersionsrelation $\omega(k) = ck$, kann nun die zeitliche Entwicklung $u(x, t)$ des Wellenpaketes im Ortsraum bestimmt werden. Zeigen Sie, dass das Wellenpaket die Form einer Gauß-Glocke behält. *Tipp: Für die Form muss nach der Integration nur $|u(x, t)|$ betrachtet werden.*

(c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt und die Breite Δx des Wellenpaketes im Ortsraum für $\omega(k) = ck$. *Hinweis:* Als Breite der Gauß-Glocke sei der Abstand der beiden Punkte rechts und links vom Maximum definiert, an denen der Funktionswert $|u(x, t)|^2$ auf den $\frac{1}{e}$-ten Teil des Maximums abgefallen ist.

(d) Bestimmen Sie das Produkt $\Delta x \cdot \Delta p$. *Hinweis:* Die Breite der Funktion $|\hat{u}(k)|^2$ im k-Raum (Δk) ergibt mit der De-Broglie-Beziehung für den Impuls $p = \hbar k$ die Impulsunschärfe.

Allgemeine Informationen:

- Klausur: 12.07.13, Raum H 0104, Uhrzeit 8:00-10:00
- Aktuelle Informationen werden immer auf der Homepage bekannt gegeben: (*http://www.itp.tu-berlin.de/?mm13*).
- Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. Eckehard Schöll		n.V.	EW 735	23500
PD Dr. Kathy Lüdge	Di	14:00–15:00 Uhr	EW 741	23002
Dipl.-Phys. Judith Lehnert	Do	15:00–16:00 Uhr	ER 246	29048
M. Sc. Andrea Völlings	Fr	14:00–15:00 Uhr	EW 632	22088
Samuel Brem	Mi	14:00–15:00 Uhr	EW 060	26143
Zeynep Cetinkaya	Fr	11:00–12:00 Uhr	EW 060	26143
Jurijs Grecenkovs	Mi	12:00–13:00 Uhr	EW 060	26143