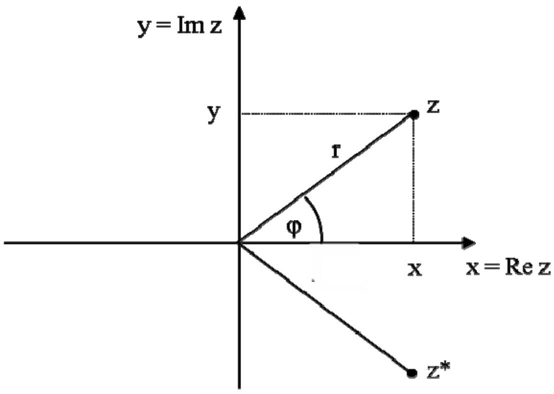
2. Komplexe Zahlen

2.1 Definition und geometrische Darstellung

Komplexe Zahl $\underline{z := x + i\,y}$

mit Realteil $x =: \mathrm{Re}\, z$,
Imaginärteil $y =: \mathrm{Im}\, z$ und
imaginärer Einheit i.

Dabei sind i und – i die Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 1 = 0$,
also $\underline{i^2 = i \cdot i = -1}$.



Algebraische und trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl z in der Gauss´schen Zahlenebene unter Verwendung von ebenen kartesischen (x, y) bzw. ebenen Polarkoordinaten (r, φ).

$z := x + i\,y$ wird <u>algebraische Darstellung</u> der komplexen Zahl z in der Gauß´schen Zahlenebene genannt.

Die <u>trigonometrische Darstellung</u> der komplexen Zahl z lautet

$$\underline{z = r\cos\varphi + i\; r\sin\varphi} \; .$$

Dabei bedeuten $r = \sqrt{x^2 + y^2} =: |z| = \sqrt{z\,z^*}$, $0 \le r < \infty$ der Betrag (Modul) und

$\arg z = \varphi + 2k\pi,\ -\pi < \varphi \le \pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ das Argument der komplexen Zahl z.

Der Winkel $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ wird Hauptwert (Phase) von z genannt.

Die komplexe Zahl $z^* := x - i\,y$ heißt komplex konjugiert zu z.

2.2 Die Euler´sche Formel

Aus der Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion folgt unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} ... = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}}_{\text{Taylor-Reihe von } \cos x} + i \overbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + ... \right)}^{\text{Taylor-Reihe von } \sin x} = \cos x + i \sin x$$

die Euler'sche Formel

$$\underline{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \, .$$

Aus der Euler´schen Formel ergibt sich zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen folgender Zusammenhang

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{1}{2} i \left(e^{-ix} - e^{ix}\right) \end{aligned} \quad .$$

$\cos x$ und $\sin x$ stellen den "geraden bzw. ungeraden Anteil" von e^{ix} dar. Der Konvergenzbereich dieser Reihen ist die gesamte reelle Achse.

Ein weiterer interessanter Zusammenhang besteht zwischen den hyperbolischen Funktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{d}{dx} \cosh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

und den trigonometrischen Funktionen (rein imaginäre Argumente):

$$\sin(ix) = i \sinh x, \; \cos(ix) = \cosh(x), \; \sinh(ix) = i \sin x, \; \cosh(ix) = \cos x \, .$$

So gilt beispielsweise die Relation $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (selbständig überprüfen).

• Die Euler'sche Formel ist oft hilfreich bei der Ableitung von Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen, z.B. der Additionstheoreme:

■ $\cos(3x) = \mathrm{Re}\left(e^{i3x}\right) = \mathrm{Re}\,[(\cos x + i\sin x)^3] = \cos^3 x - 3\cos x\,\sin^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

■ $\sin(4x) = \mathrm{Im}\left(e^{i4x}\right) = \mathrm{Im}\,[(\cos x + i\sin x)^4] = 4\cos^3 x\,\sin x - 4\cos x\,\sin^3 x =$
$= 8\cos^3 x\,\sin x - 4\sin x\cos x$

usw.

2.3 Rechenregeln für komplexe Zahlen

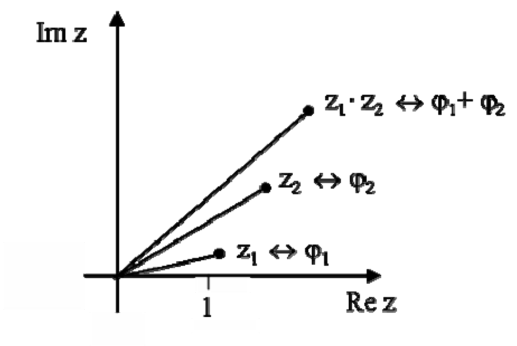
Bei Bedarf Addition/Subtraktion, Multiplikation/Division, Potenzen/Wurzeln komplexer Zahlen wiederholen und üben (vgl. z.B. Bronstein, Kap. 1.5.3.)

• Multiplikation der komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + i\,b_1,\; z_2 = a_2 + i\,b_2$

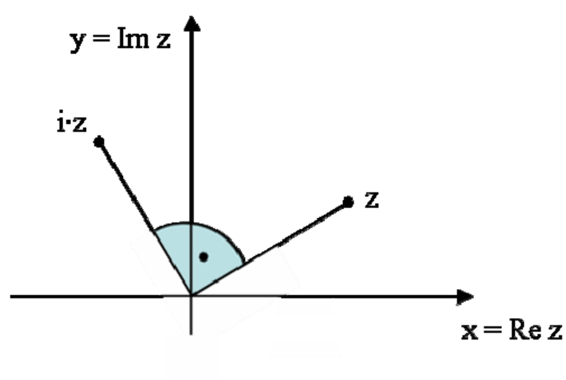
- in algebraischer Darstellung: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i\,b_1)\cdot(a_2 + i\,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i\,(a_1b_2 + b_1a_2)$

- in trigonometrischer Darstellung: $z_1 \cdot z_2 = r_1\,r_2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1\,r_2\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$,

also Addition der Winkel (Drehung) und Multiplikation der Beträge (Streckung/Stauchung).



Produkt $z_1\,z_2$: drehe Vektor z_2 gegen Uhrzeigersinn um φ_1 und strecke/stauche um r_1



Multiplikation mit imaginärer Einheit i äquivalent zu Drehung um $\pi/2$

• <u>Division komplexer Zahlen</u>

- in algebraischer Darstellung:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a_1+i\,b_1)}{(a_2+i\,b_2)}=\frac{(a_1+i\,b_1)\,(a_2-i\,b_2)}{(a_2+i\,b_2)\,(a_2-i\,b_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

- in trigonometrischer Darstellung (selbständig): Subtrahiere die Winkel und dividiere die Beträge.

• <u>Potenzieren komplexer Zahlen</u>

Unter Verwendung des Euler´schen Satzes finden wir die <u>Formel von Moivre</u>

$$z^n=\left[r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,\right]^n=(r\,e^{i\varphi})^n=r^n\,e^{i\,n\,\varphi}=r^n\left[\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\,\right]$$

• <u>Wurzel aus einer komplexen Zahl</u> (Radizieren)

Es ist $z=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r\,e^{i\varphi}$ und $\arg z=\varphi+2k\pi,\ -\pi<\varphi\leq\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ (nicht nur der Hauptwert!).

Deshalb hat $z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$ n verschiedene Werte

$$z_n=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,\ldots,n-1\ .$$

In der Gauss´schen Zahlenebene bilden die z_n die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung.

Beispiele:

■ n-te Wurzel der Gleichung $z^n = 1$ (n-te Einheitswurzel):

Zu lösen ist die Gleichung (r = 1) $z^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = 1$. Wegen $e^{2\pi k i} = 1$ folgt

$\varphi_k = \dfrac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

- $z^2 = 1 \to \varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \pi$
- $z^3 = 1 \to \varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \dfrac{1}{3} 2\pi \cdot 1 = \dfrac{2\pi}{3}$, $\varphi_3 = \dfrac{1}{3} 2\pi \cdot 2 = \dfrac{4\pi}{3}$ (gleichseitiges Dreieck) auf

dem Einheitskreis.

■

Die 6 verschiedenen Werte für $\sqrt[6]{z}$ bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks auf dem Einheitskreis (Radius 1); aufeinanderfolgende Punkte sind um $\dfrac{\pi}{6}$ gedreht