3. Vektoren

3.1 Definition, Einheitsvektoren, Rechenregeln

Neben *skalaren* Größen, also Zahlen mit Maßeinheit wie Masse, Energie, Druck usw. verwenden wir in der Physik *vektorielle* Größen, z.B. Ortsvektor, Geschwindigkeit, Kraft, Feldstärke usw. Vektoren besitzen eine Länge, den Betrag des Vektors (Skalar), und eine Richtung.

Wir vereinbaren folgende Notation: Vektor $\underline{a}$ (einfach unterstrichen), Länge (Betrag) des Vektors $\underline{a}$: $|\underline{a}| = a$.

Drei Zahlen sind im dreidimensionalen Raum zur eindeutigen Bestimmung des Ortsvektors ausreichend. Im kartesischen Koordinatensystem werden die drei senkrechten Projektionen x, y, z auf die Koordinatenachsen verwendet, in sphärischen Koordinaten die Länge des Vektors, r, und die beiden Winkel φ und ϑ:

$$x = r\,\cos\varphi\;\sin\theta,$$
$$y = r\,\sin\varphi\;\sin\theta,$$
$$z = r\,\cos\theta.$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

<u>Definition</u>: Vektoren im dreidimensionalen Raum sind *geordnete* Zahlentripel,

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ usw.,}$$

die sich auf ein Koordinatensystem beziehen und für die bestimmte Rechenregeln gelten.

Bem.: *geordnete* Zahlentripel.

(i) Ein Zahlentripel aus Temperatur, Druck und Volumen bildet keinen Vektor.

(ii) Der Physiker verlangt, dass sich Vektoren bei Rotation des Koordinatensystems gemäß $\underline{a'} = \underline{\underline{D}}\,\underline{a}$ transformieren. $\underline{\underline{D}}$ ist eine sogenannte Drehmatrix (vgl. Vorlesung 4. Woche). Die Länge eines Vektors und der Winkel zwischen zwei Vektoren sind invariant gegen Rotation des Koordinatensystems.

• *Einheitsvektoren* (EHV) sind Vektoren der Länge Eins; sie sind besonders gut zur Kennzeichnung von Richtungen geeignet.

Für einen beliebigen Vektor $\underline{a}$ der Länge a ist $\underline{e} = \frac{1}{a}\underline{a}$ der Einheitsvektor in Richtung von $\underline{a}$.

Kartesische Koordinatensysteme im dreidimensionalen Raum lassen sich durch die senkrecht aufeinanderstehenden Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen

$$\underline{e}_x = \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_y = \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \underline{e}_z = \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

festlegen. Die Darstellung

$$\underline{a} = a_x\,\underline{e}_x + a_y\,\underline{e}_y + a_z\,\underline{e}_z \quad \text{oder} \quad \underline{a} = a_1\,\underline{e}_1 + a_2\,\underline{e}_2 + a_3\,\underline{e}_3$$

heißt *Komponentendarstellung* des Vektors $\underline{a}$ bzgl. der Basis ($\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$) bzw. ($\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$).

3.2 Rechenregeln für Vektoren

Für Vektoren sind die Addition und die Multiplikation mit einer Zahl definiert: Vektoren werden addiert, indem man ihre Komponenten addiert (Kräfteparallelogramm; die Addition ist kommutativ).
Zur Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl werden die Komponenten des Vektors mit dieser Zahl multipliziert.

■ Multiplikation mit -1 kehrt die Richtung von $\underline{a}$ um.
■ $\underline{a} = a\,\underline{e}$

• *Produkte aus zwei Vektoren*:
Es gibt zwei physikalisch sinnvolle Möglichkeiten, zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ miteinander zu multiplizieren, das Skalarprodukt $\underline{a} \cdot \underline{b}$ und das Vektorprodukt $\underline{a} \times \underline{b}$.

3.2.1 **Skalarprodukt** (inneres Produkt)

Def.: Skalarprodukt der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ ist der Skalar (die Zahl)

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} : \ \underline{a} \cdot \underline{b} := a\,b_{\|} = a_{\|}\,b = a\,b\cos\varphi = \sum_{i=1}^{3} a_i\,b_i \,.$$

$a_{\|}$ und $b_{\|}$ bezeichnen die Projektionen von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$ und umgekehrt, φ ist der Winkel zwischen $\underline{a}$ und $\underline{b}$, es gilt $\frac{b}{b_{\|}} = \frac{a}{a_{\|}}$.

Ausgewählte Eigenschaften des Skalarprodukts:

- $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$ (Skalarprodukt kommutativ)

- speziell gilt $\underline{e} \cdot \underline{e} = 1$ für alle EHVen

- Betrag, Länge des Vektors $\underline{a}$: $a \equiv |\underline{a}| := \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} \overset{\text{im } R^3}{=} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

- Orthogonalität: Zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ heißen orthogonal genau dann, wenn $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$.

■ Bei der Verschiebung eines Körpers K um $\underline{\Delta r}$ durch eine im Schwerpunkt von K angreifende Kraft $\underline{F}$ ist die verrichtete Arbeit ΔA proportional zu F cosφ, also proportional zur senkrechten Projektion von $\underline{F}$ auf $\underline{\Delta r}$ (das ist die Komponente der Kraft $\underline{F}$ in Richtung der Verschiebung $\underline{\Delta r}$) und zum Betrag der Verschiebung Δr. φ ist der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\underline{F}$ und $\underline{\Delta r}$. Also haben wir $\Delta A = F \Delta r \cos\varphi =: \underline{F} \cdot \underline{\Delta r}$ und bei infinitesimaler Verschiebung $\underline{dr}$ für die verrichtete Arbeit das Skalarpodukt aus $\underline{F}$ und $\underline{dr}$

$$dA = \underline{F} \cdot \underline{dr}.$$

• Skalarprodukt in Komponentenschreibweise:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3) \cdot (b_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2 + b_3 \underline{e}_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

denn $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$,

weil die EHV $\{\underline{e}_i\}$ paarweise senkrecht aufeinander stehen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise hat Einstein vorgeschlagen, über doppelt vorkommende Indices zu summieren, ohne das Summenzeichen anzugeben:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_i b_i.$$ *Summenkonvention*

Bequem ist auch die Einführung des Kronecker-Symbols

$$\delta_{ij} := \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} .$$

Dann haben wir statt der ganzen Schreiberei oben einfach

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_i \, \underline{e}_i \cdot b_k \, \underline{e}_k = a_i b_k \; \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k = a_i b_k \, \delta_{ik} = a_i b_i \; .$$

□ Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der Relationen

$$\delta_{ii} = \delta_{nn} = 3 , \quad \delta_{ij} \, \delta_{jk} = \delta_{ik} , \quad c_k \, a_i \, a_j \, b_k \, \delta_{ij} = a^2 (\underline{c} \cdot \underline{b}) \; .$$

3.2.2 **Vektorprodukt** (Kreuzprodukt, äußeres Produkt)

Definition: Das Vektorprodukt aus zwei Vektoren a und b ist der Vektor, dessen Betrag gleich der Fläche des durch a und b definierten Parallelogramms ist, $|\underline{a} \times \underline{b}| = a\, b \sin\varphi$, und der senkrecht auf der durch a und b aufgespannten Ebene steht ($\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}, \underline{b}$)

$$\underline{a} \times \underline{b} = a\, b \, \sin\varphi \; \underline{e} \, .$$

φ bezeichnet wieder der Winkel zwischen a und b. Der EHV e und die EHVen in a und b Richtung bilden ein Rechtssystem (Rechte-Hand-Regel). Außerdem gilt $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$.

■ Lorentz-Kraft $\underline{F}_L$ auf eine Punktladung q, die sich mit der Geschwindigkeit v in einem Magnetfeld der Induktion B bewegt

$$\underline{F}_L = q \; \underline{v} \times \underline{B} \, .$$

Die Lorentz-Kraft steht senkrecht auf v und B; die drei Vektoren $\underline{F}_L$, v und B bilden ein Rechtssystem.

■ Drehmoment $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$

Die Kraft $\underline{F}$ greift in einem Punkt P mit dem Ortsvektor an einem um den Koordinatenursprung O drehbar gelagerten Körper K an. Die Kraftkomponente F sinφ erzeugt das Drehmoment $\underline{M}$. Die drei Vektoren $\underline{M}$, $\underline{r}$ und $\underline{F}$ bilden ein Rechtssystem.

■ Drehimpuls $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$.

• Vektorprodukt in Komponentenschreibweise: Das Vektorprodukt aus

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ ist der Vektor}$$

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \underline{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \underline{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \underline{e}_1 \, (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \underline{e}_2 \, (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \underline{e}_3 \, (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise verwenden wir das ε- oder *Levi-Civita-Symbol*

$$\varepsilon_{ijk} := \underline{e}_i \cdot \left(\underline{e}_j \times \underline{e}_k \right) = \begin{cases} +1, \text{ wenn i, j, k zyklisch zu 1,2,3} \quad (123, 231, 312) \\ -1, \text{ wenn i, j, k antizyklisch zu 1,2,3} \quad (213, 132, 321) \\ 0, \text{ ansonsten (z.B. mindesten zwei gleiche Indices)} \end{cases} .$$

Man zeigt leicht, dass

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \sum_{i,j,k}^{3} \varepsilon_{ijk} \, a_i \, b_j \, \underline{e}_k$$

gilt oder verkürzt unter Verwendung der Summenkonvention

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \varepsilon_{ijk} \, a_i \, b_j \, \underline{e}_k , \quad \text{bzw.} \quad c_i = (\underline{a} \times \underline{b})_i = \varepsilon_{ijk} \, a_j \, b_k .$$

4. Matrizen und Determinanten

Eine Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist ein Schema von $m \times n$ Zahlen a_{ij} bestehend aus $i = 1, 2, \ldots, m$ Zeilen und $j = 1, 2, \ldots, n$ Spalten

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ m Zeilen und n Spalten, "Matrix vom Typ (m,n)".

Im Folgenden seien die Matrixelemente a_{ij} reelle oder komplexe Zahlen sowie m und n endlich.

Die zu $\underline{\underline{A}}$ *transponierte* Matrix $\underline{\underline{A}}^T$ entsteht durch Vertauschung der Zeilen und Spalten von $\underline{\underline{A}}$, ihre Matrixelemente lauten also $a_{ij}{}^T = a_{ji}$.

Die Matrix $\underline{\underline{A}}^+$ mit den Elementen $\overline{a}_{ki}$ heißt *adjungiert* zur Matrix $\underline{\underline{A}}$ mit den (komplexen) Elementen a_{ik}.

Eine Matrix $\underline{\underline{A}}$ mit komplexen Elementen heißt hermitesch oder selbstadjungiert, wenn $\underline{\underline{A}}^+ := \overline{\underline{\underline{A}}}^T = \overline{\underline{\underline{A}}^T} = \underline{\underline{A}}$. Dann stimmen die transponierte und die komplex konjugierte Matrix überein: $\underline{\underline{A}}^T = \overline{\underline{\underline{A}}}$.

4.1 Rechenregeln für Matrizen

<u>Gleichheit</u> von zwei Matrizen: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$, wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für alle i, j.

<u>Summe</u> zweier Matrizen gleichen Typs: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ für alle i, j.

Die Addition von Matrizen ist kommutativ: $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$.

<u>Multiplikation</u> einer Matrix <u>mit einer Zahl</u>: $\alpha\, \underline{\underline{A}} = (\alpha\, a_{ij})$ (<u>alle</u> Elemente mit α multiplizieren).

- Multiplikation von Matrizen

Sei $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ eine Matrix vom Typ (m_A,n_A) und $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})$ eine Matrix vom Typ (m_B,n_B). Nur wenn $\underline{\underline{A}}$ genauso viele Spalten wie $\underline{\underline{B}}$ Zeilen hat (also $n_A = m_B$ ist), ist das Produkt beider Matrizen definiert, wobei gilt

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}} = (c_{ij}),\ c_{ij} = a_{ik} b_{kj} \quad \text{(Summenkonvention, ausführlich } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_A = m_B} a_{ik} b_{kj} \text{)}.$$

Also werden paarweise die Elemente der i-ten Zeile von $\underline{\underline{A}}$ mit den Elementen der k-ten Spalte von $\underline{\underline{B}}$ multipliziert und addiert: Das Matrixelement c_{ij} ist das Skalarprodukt aus dem i-ten Zeilenvektor von $\underline{\underline{A}}$ und dem j-ten Spaltenvektor von $\underline{\underline{B}}$. Die Produktmatrix hat m_A Zeilen und n_B Spalten.

Beachte: Aus $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = 0$ und $\underline{\underline{A}} \neq 0$ (also nicht die Nullmatrix) kann nicht $\underline{\underline{B}} = 0$ gefolgert werden. Analog folgt aus $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}}$ und $\underline{\underline{A}} \neq 0$ *nicht* $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$.

Im Gegensatz zur Addition ist die Multiplikation von Matrizen i.a. <u>nicht</u> kommutativ!

■ $$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = (3+8) = \underbrace{(11)}_{1\times 1-\text{Matrix}}, \ \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}}_{2\times 2-\text{Matrix}}$$

Für nichtquadratische Matrizen verhindert oft schon die Bedingung $n_A \neq m_B$ die Vertauschbarkeit. Dennoch kommutieren auch quadratische Matrizen i.a. nicht:

■ $$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

Da multiplikativ vertauschbare Matrizen etwas Besonderes sind, definiert man:

Def.: Die Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ heißen *vertauschbar* (kommutierend), wenn

$$[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}] := \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = 0$$

gilt.

4.2 Determinante einer quadratischen $n \times n$ - Matrix

Die Determinante der quadratischen Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist die Zahl

$$\text{Def.: } \operatorname{Det}(\underline{\underline{A}}) \equiv \left|\underline{\underline{A}}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} - / + \ldots a_{1n} A_{1n}$$

mit den Unterdeterminanten A_{ik}. A_{ik} ist die Determinante n-1 ten Grades, die aus der Determinante von $\underline{\underline{A}}$ durch Streichung ihrer i-ten Zeile und ihrer k-ten Spalte entsteht. Diese rekursive Definition führt eine Determinante n-ten Grades auf eine Summe von Determinanten n-1 -ten Grades zurück. Falls n = 1, ist die Determinante das Matrixelement selbst.

Die mit dem Faktor $(-1)^{i+k}$ versehene Unterdeterminante des Elements a_{ik} wird als Adjunkte (algebraisches Komplement) A_{ik} des Elements a_{ik} bezeichnet. Der Ausdruck in der Definition für $\operatorname{Det}(\underline{\underline{A}})$ ist ein Beispiel für den Laplace´schen Entwicklungssatz:

$$\operatorname{Det}(\underline{\underline{A}}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} A_{ki} \,,$$

also die Entwicklung einer Determinante nach den Elementen einer Zeile oder einer Spalte.

■ Nach dieser Definition berechnet sich z.B. die Determinante einer quadratischen Matrix 3-ten Grades wie folgt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Merkregel für Determinaten 2. Grades: Produkt der Hauptdiagonalelemente minus Produkt der Nebendiagonalelemente.

Der Ausdruck für die Determinante 3. Grades lässt sich leicht über die Sarrus´sche Regel merken:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Terme mit positivem Vorzeichen entstehen aus dem wie oben erweiterten Schema durch Produktbildung aus den a_{ik} entlang und parallel zur Hauptdiagonalen (durchgezogene Linien). Terme mit negativem Vorzeichen entstehen analog entlang und parallel zur Nebendiagonalen (unterbrochene Linien).

Die Sarrus´sche Merkregel gilt nur für Determinanten 3. Grades!

4.3 Quadratische Matrizen $(n \times n)$

Quadratische Matrizen werden transponiert, indem man ihre Elemente an der Hauptdiagonale spiegelt. Eine <u>quadratische</u> Matrix $\underline{\underline{A}}$ heißt *symmetrisch*, wenn $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$ bzw. $a_{ij} = a_{ji}$.

Die quadratische Matrix $\underline{\underline{A}}$ heißt *regulär*, wenn ihre Determinante verschieden von Null ist, $\mathrm{Det}(\underline{\underline{A}}) \neq 0$. Die Regularität von $\underline{\underline{A}}$ ist notwendig und hinreichend für die Existenz der zu $\underline{\underline{A}}$ *inversen* Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$, für die $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$ gilt. Die zu $\underline{\underline{A}}$ inverse Matrix wird aus

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}\,\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

berechnet, wobei A_{ik} die zum Element a_{ik} gehörige Adjunkte ist, also die mit dem Faktor $(-1)^{i+k}$ versehene Unterdeterminante.

Beachte $(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}$.

Die reguläre quadratische Matrix $\underline{\underline{A}}$ heißt orthogonal, wenn $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}^{-1}$ gilt.

Die komplexe quadratische Matrix $\underline{\underline{A}}$ heißt unitär, wenn $\underline{\underline{A}}^T = \overline{\underline{\underline{A}}}^{-1}$ gilt.

Potenzen $\underline{\underline{A}}^2, \ldots, \underline{\underline{A}}^n$ können nur für quadratische Matrizen $\underline{\underline{A}}$ gebildet werden. Dabei gilt

$$\underline{\underline{A}}^2 := \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} = (a_{ik} a_{kj}), \quad \text{usw. sowie } e^{\underline{\underline{A}}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underline{\underline{A}}^n$$

■ $\dfrac{d}{dt} e^{\underline{\underline{A}}\,t} = \underline{\underline{A}}\, e^{\underline{\underline{A}}\,t}$, denn $e^{\underline{\underline{A}}\,t} := \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} (\underline{\underline{A}}\,t)^k = 1 + \underline{\underline{A}}\,t + \dfrac{1}{2} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}\,t^2 + \ldots$.

Also ist

$$\frac{d}{dt} e^{\underline{\underline{A}}\,t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, k\, \underline{\underline{A}}\, (\underline{\underline{A}}\,t)^{k-1} = \underline{\underline{A}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} (\underline{\underline{A}}\,t)^{k-1} \underset{k-1=n}{=} \underline{\underline{A}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\underline{\underline{A}}\,t)^n = \underline{\underline{A}}\, e^{\underline{\underline{A}}\,t}.$$

Bemerkung: Vorlesung Lineare Algebra

In der linearen Algebra werden Vektoren ohne Bezug auf ein Koordinatensystem ad hoc als (geordnetes) n-Tupel von Zahlen definiert, für die bestimmte Rechenregeln gelten.

Definition: $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \underline{e}_i \in \Re^n$ oder C^n, d.h., die Zahlen a_i sind reell oder komplex.

Die Vektoren werden als Elemente eines linearen *Vektorraums* aufgefasst. Wiederholen Sie die Axiome des linearen Vektorraums, insbesondere die Begriffe lineare Unabhängigkeit von Vektoren und Basis.