3.3 Mehrfache Vektorprodukte

3.3.1 Doppeltes Kreuzprodukt

$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c})=\underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c})-\underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$ $\rightarrow$ bac-cab Regel

Beweis: komponentenweise unter Verwendung der auf dem 3. Übungsblatt bewiesenen Relation $\varepsilon_{ikj}\,\varepsilon_{jlm}=\delta_{il}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kl}$ (Summenkonvention beachten):

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c})_k=\varepsilon_{ijk}\,a_i\,(\underline{b}\times\underline{c})_j=\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmj}a_i\,b_l\,c_m=-\varepsilon_{ikj}\,\varepsilon_{jlm}a_i\,b_l\,c_m=$$
$$=a_i\,b_l\,c_m(\delta_{im}\delta_{kl}-\delta_{im}\delta_{kl})=a_i\,b_k\,c_i-a_i\,b_i\,c_k=b_k(\underline{a}\cdot\underline{c})-c_k(\underline{a}\cdot\underline{b})=\left[\underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c})-\underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})\right]_k$$

Das doppelten Kreuzprodukt aus den drei Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ ist ein Vektor in der durch $\underline{b}$ und $\underline{c}$ aufgespannten Ebene.

□ $\|-\perp$ Zerlegung

Jeder Vektor $\underline{a}$ kann in einen Anteil parallel und einen Anteil senkrecht zu einer durch den Einheitsvektor $\underline{e}$ definierten Richtung zerlegt werden. Für diese Anteile, $\underline{a}_\|$ bzw. $\underline{a}_\perp$, gilt:

$\underline{a}=\underline{a}_\|+\underline{a}_\perp$ mit $\underline{a}_\|=(\underline{a}\cdot\underline{e})\underline{e}$ und $\underline{a}_\perp=\underline{e}\times(\underline{a}\times\underline{e})$.

Der Ausdruck für $\underline{a}_\|$ ist offensichtlich, derjenige für $\underline{a}_\perp$ folgt aus der bac-cab Regel, denn

$\underline{a}_\perp=\underline{a}-\underline{a}_\|=\underline{a}(\underline{e}\cdot\underline{e})-\underline{e}(\underline{a}\cdot\underline{e})=\underline{e}\times(\underline{a}\times\underline{e})$.

3.3.1 Spatprodukt

Das Spatprodukt $\underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c})$ ist der Skalar

$$\underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c})=a_1(\underline{b}\times\underline{c})_1+a_2\cdot(\underline{b}\times\underline{c})_2+a_3\cdot(\underline{b}\times\underline{c})=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=$$

$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2=\mathrm{Det}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}.$$

Geometrisch ist das Spatprodukt gleich dem Volumen des Parallelepipeds, dessen Kanten durch die drei Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ definiert ist. Da alle Kanten gleichberechtigt sind, ist das Spatprodukt invariant gegen zyklische Vertauschungen der drei Vektoren

$$\underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = \underline{b}\cdot(\underline{c}\times\underline{a})\,.$$

Diese Eigenschaft ergibt sich auch daraus, dass die Vertauschung zweier Zeilen in einer Determinante lediglich deren Vorzeichen ändert. Zwei Zeilen müssen vertauscht werden, um

$$\underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c}) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \text{ in } \underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \text{ zu überführen, usw.}$$

□ Beachte und überprüfe

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})\cdot(\underline{b}\cdot\underline{d}) - (\underline{a}\cdot\underline{d})\cdot(\underline{b}\cdot\underline{c})\,,$$

beispielsweise gilt die häufig verwendete Beziehung $(\underline{a}\times\underline{b})^2 = a^2\, b^2 - (\underline{a}\cdot\underline{b})^2$.

5. Vektorfunktionen (→ vektorwertige Funktionen)

5.1 Definition, Ableitung

Eine Vektorfunktion $\underline{r}(t)$ ist eine Menge von geordneten Paaren $(t, \underline{r}(t))$ in $R^1 \times R^n$.
Die zugelassenen Zahlenwerte für t bestimmen den Definitionsbereich, die zugeordneten Vektoren $\underline{r}(t)$ den Wertebereich.
Im R^3 lässt sich $\underline{r}(t)$ als Raumkurve geometrisch veranschaulichen. Gleichwertige Darstellungen im kartesischen Koordinatensystem sind

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big)^T = x(t)\,\underline{e}_x + y(t)\,\underline{e}_y + z(t)\,\underline{e}_z = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\ \underline{e}_i = x_i(t)\ \underline{e}_i \quad \text{usw.}$$

Def.: Die Ableitung der Vektorfunktion $\underline{r}(t)$ ist der Grenzwert

$$\frac{d\underline{r}}{dt} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} =: \dot{\underline{r}}(t) \ .$$

Der Vektor $\frac{d\underline{r}}{dt}$ ist entlang der Tangente an die Raumkurve im Punkt $\underline{r}$ (t) gerichtet.

Aquivalente Notationen sind:

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)^T = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = \frac{dx}{dt}\underline{e}_x + \frac{dy}{dt}\underline{e}_y + \frac{dz}{dt}\underline{e}_z = \frac{dx_i}{dt}\underline{e}_i = \ldots \quad \text{usw.}$$

■ Ist $\underline{r}$ der Ortsvektor/Radiusvektor eines Massepunkts und t die Zeit, dann ist $\underline{r}(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t die Position des Massepunktes zu diesem Zeitpunkt. Bei Veränderung von t beschreibt $\underline{r}(t)$ die Bahnkurve des Massepunkts. In diesem Fall schreiben wir verkürzt

$\frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{r}}$. Dieser Vektor gibt die Momentangeschwindigkeit des Massepunktes an, sie ist tangential zur Bahnkurve gerichtet.

Ableitungen höherer Ordnung werden rekursiv definiert: $\frac{d^n}{dt^n}\underline{r}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\underline{r}(t) \right)$

Sollen Vektorfunktion abgeleitet werden, sind die Regeln für die Differentiation von Funktionen einer unabhängigen Variablen und die Gesetze der Vektoralgebra zu berücksichtigen, z.B.:

■ Produktregeln der Vektordifferentiation:

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\, \underline{a}(t) \right] = \frac{df(t)}{dt}\, \underline{a}(t) + f(t)\, \frac{d\underline{a}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{a}(t)\cdot\underline{b}(t)\right]=\underline{b}(t)\cdot\frac{d\underline{a}(t)}{dt}+\underline{a}(t)\cdot\frac{d\underline{b}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{a}(t)\times\underline{b}(t)\right]=\frac{d\underline{a}(t)}{dt}\times\underline{b}(t)+\underline{a}(t)\times\frac{d\underline{b}(t)}{dt}$$

denn $\frac{d}{dt}(\underline{a}\times\underline{b})_k=\frac{d}{dt}[\varepsilon_{ijk}a_j(t)\,b_j(t)]=\varepsilon_{ijk}[\dot{a}_j(t)\,b_j(t)+a_j(t)\,\dot{b}_j(t)]=[\dot{\underline{a}}\times\underline{b}]_k+[\underline{a}\times\dot{\underline{b}}]_k$

Weitere Beispiele:

■ Die Ableitung einer Vektorfunktion $\underline{a}(t)$ mit konstantem Betrag steht senkrecht auf $\underline{a}(t)$, denn aus $\underline{a}^2(t)=\text{const}$ folgt $\underline{a}\cdot\frac{d\underline{a}}{dt}+\frac{d\underline{a}}{dt}\cdot\underline{a}=2\underline{a}\cdot\frac{d\underline{a}}{dt}=0$.

Diese Eigenschaft ist speziell für Einheitsvektoren nützlich.

■ Für eine vektorwertige Funktion $\underline{a}(t)$ mit Betrag a(t) gilt $\underline{\underline{a}\cdot\frac{d\underline{a}}{dt}=a\frac{da}{dt}}$.

<u>Beweis</u>: $\underline{a}=a\,\underline{e}$ abgeleitet nach t führt auf $\frac{d\underline{a}}{dt}=\frac{da}{dt}\underline{e}+a\frac{d\underline{e}}{dt}$, beide Seiten skalar mit $\underline{a}=a\underline{e}$ multipliziert, folgt die Behauptung wegen $\underline{e}\cdot\frac{d\underline{e}}{dt}=0$.

■ Beachte: Bei Bewegung einen Massepunkts entlang seiner Bahnkurve $\underline{r}(t)$ gilt für die zeitliche Änderung des Abstands vom Koordinatenursprung $r=|\underline{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{2x\dot{x}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{y\dot{y}}{r}+\frac{z\dot{z}}{r}=\frac{\underline{r}\cdot\dot{\underline{r}}}{r}=\dot{\underline{r}}\cdot\frac{\underline{r}}{r}=\dot{\underline{r}}\cdot\underline{e}_r=v_{\parallel}.$$

Hier bezeichnet $\underline{e}_r:=\frac{\underline{r}}{r}$ den Einheitsvektor in $\underline{r}$-Richtung. Im Gegensatz zu den konstanten EHV entlang der Achsen des kartesischen Koordinatensystems ändert $\underline{e}_r$ seine Richtung mit der Zeit.

■■■ Isaac Newton ( ) leitet das Gravitationsgesetz aus den Gesetzen der Planetenbewegung von Johannes Kepler ( ) ab. Bei dieser Ableitung spielt die Bahnkurve ´der Planeten um die Sonne´ eine entscheidende Rolle.

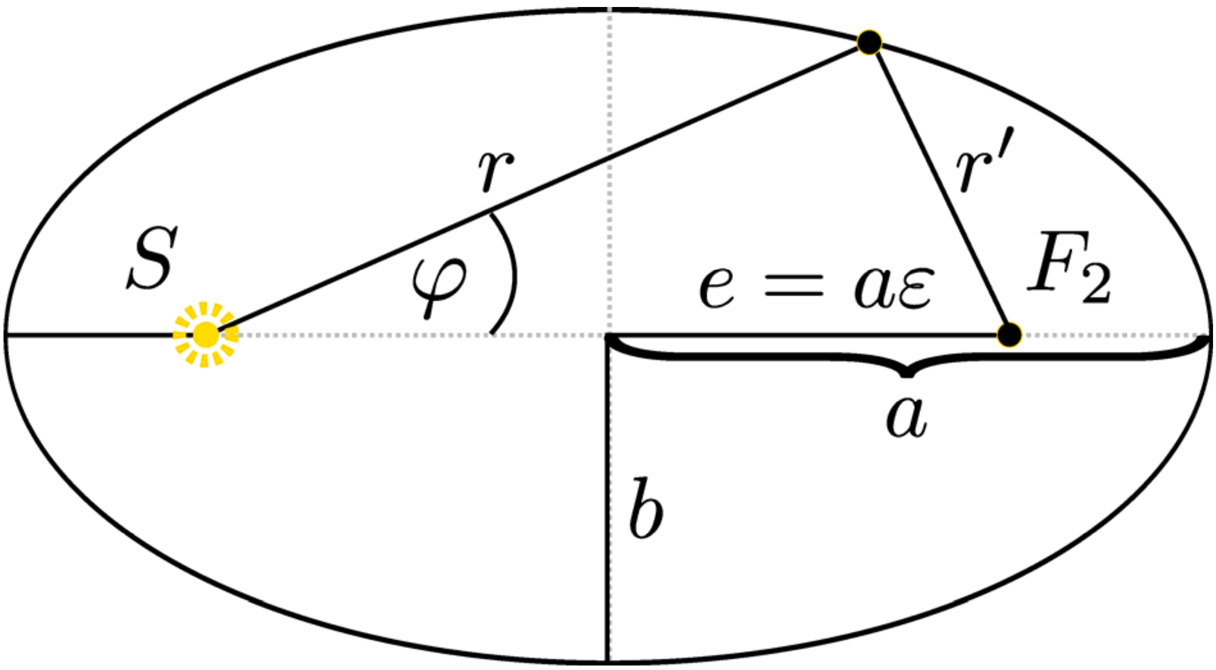
Ist $\underline{r}\,(t)$ Bahnkurve des Planeten, dann sind $\dot{\underline{r}}(t)$ und $\ddot{\underline{r}}(t)$ seine Geschwindigkeit und seine Beschleunigung zur Zeit t. Nach der Newton´schen Bewegungsgleichung kann aus der Beschleunigung auf die Kraft geschlossen werden, die die Bewegung hervorruft

$$\underline{F}(\underline{r}) = m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = m\ddot{\underline{r}} \quad (m = \text{const}). \qquad \text{(A)}$$

Hier ist m die Masse des als Massepunkt aufgefassten Planeten.

Bemerkungen: 1) Die Ermittlung der Bahnkurve eines Massepunkts aus der angreifenden resultierenden Kraft ist die Grundaufgabe der Mechanik einer Punktmasse. Dazu ist die Newton´sche Bewegungsgleichung zu integrieren. Hier gehen wir den umgekehrten Weg und bestimmen die Kraft zwischen Sonne und Planet aus den beobachteten Planetenbahnen.
2) Tatsächlich rotieren Sonne und Planet um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, der wegen $m_{Sonne} >> m$ praktisch mit dem Sonnenmittelpunkt zusammenfällt. Die vollständige Behandlung der Bewegung von Sonne und Planet (Zweikörperproblem) erfolgt im kommenden Semester.

<u>I. Kepler´sches Gesetz:</u> Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht (ebene Bahnkurve!).
Die Ellipse ist der geometrischer Ort aller Punkte, für die Summe der Abstände von zwei festen Punkten, den sogenannten Brennpunkten, konstant ist: $r + r' = \text{const} = 2a$.



$\varphi = 0$: sonnennächster Punkt $\rightarrow$ Perihel
$\varphi = \pi$: sonnenfernster Punkt $\rightarrow$ Aphel

a und b bezeichnen die Längen der großen und der kleinen Halbachse. a ε ist der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt der Ellipse. Die Größe $\underbrace{0}_{\text{Kreis}} \leq \varepsilon \leq 1$ heißt Exzentrizität der Ellipse.

Aus rein geometrischen Überlegungen ergibt sich für die Bahnkurve in Polarkoordinaten (Rechnungen Übungsblatt):

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi} \qquad \text{(B)}$$

mit $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$. Die Konstante $p := \frac{b^2}{a} < 1$ wird Bahnparameter genannt.

Nebenrechnung Übungsblatt:

II. Kepler´sches Gesetz: Der Leitstrahl Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Der in einem kleinen Zeitintervall dt überstrichene Flächensektor ist proportional zur verstrichenen Zeit dt. Das bedeutet (Übungsblatt)

$$r^2 \dot{\varphi} = \text{const} =: \frac{L}{m} \qquad \text{(C)}$$

Nebenrechnung Übungsblatt:

Für die Geschwindigkeit des Planeten entlang der Bahnkurve $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = r(t) \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

folgt

$$\frac{d\underline{r}(t)}{dt} = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{r}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} + r\dot{\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}.$$

Unter Berücksichtigung von (B) finden wir $\dot{r} = -\frac{L}{m}\frac{\varepsilon}{p}\sin\varphi$, aus (C) folgt $\dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2}$.

Nebenrechnung Übungsblatt:

Damit haben wir (nachprüfen!)

$$\dot{\underline{r}}(t) = \frac{L}{m p}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ -\varepsilon + \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}.$$

Nebenrechnung Übungsblatt:

Nachmalige Differentiation nach der Zeit ergibt für die Beschleunigung des Planeten den Ausdruck

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \frac{d\dot{\underline{r}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{L}{m p}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ -\varepsilon + \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\right\} = \frac{L}{p m}\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\ -\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\dot{\varphi} = -\frac{L}{p m}\frac{L}{m r^2}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} = -\frac{L^2}{p m^2}\frac{1}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}.$$

$\underline{e}_r := \frac{\underline{r}}{r}$ ist der *zeitabhängige* EHV in r-Richtung mit den Komponenten $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T$.

Interpretation des Ergebnisses: Bei der Planetenbewegung ist die Beschleunigung umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen Planet und Sonne, sie ist vom Planeten zur Sonne gerichtet ($-\underline{r}/r$).

Newton: $m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = m\ddot{\underline{r}} = -\frac{L^2}{p m}\frac{1}{r^2}\frac{\underline{r}}{r} = \underline{F}(\underline{r})$.

Aus Symmetriegründen (vertausche Planet und Sonne) setzt man unter Einführung der Gravitationskonstanten γ gemäß $\frac{L^2}{p\,m} =: \gamma\, m\, M$ und erhält so die vertraute Form des Newton´schen Gravitationsgesetzes (1687)

$$\underline{F}_G(\underline{r}) = \frac{\gamma\, m\, M}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}, \;\; \gamma = 6.67\cdot 10^{11}\, m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}$$ - universelle Gravitationskonstante

Sonne und Planet ziehen sich gegenseitig mit der Gravitationskraft an. Diese wirkt in Richtung $\underline{r}$ der Verbindungslinie und hat den Betrag $F_G = \frac{\gamma\, m\, M}{r^2}$.