6.3 Zweifache Nabla-Anwendungen

Kurze Wiederholung Felder I: Wir kennen bisher folgende einfache Anwendungen des Nabla-Operator auf skalare und vektorielle Felder

$$\underline{\nabla}\,\phi(\underline{r}) =: \mathrm{grad}\,\phi(\underline{r}) \qquad \underline{\nabla}\cdot\underline{A}(\underline{r}) =: \mathrm{div}\,\underline{A}(\underline{r}) \qquad \underline{\nabla}\times\underline{A}(\underline{r}) =: \mathrm{rot}\,\underline{A}(\underline{r})$$

Skalares Feld $\phi(\underline{r}) \rightarrow$ Vektorfeld grad $\phi(\underline{r})$. Die Projektion von grad $\phi(\underline{r})$ auf eine Richtung $d\underline{r}$ ist gleich der Änderung $d\phi(\underline{r})$ von $\phi(\underline{r})$ in Richtung $d\underline{r}$ (Richtungsableitung)

$$d\phi(\underline{r}) = \mathrm{grad}\,\phi(\underline{r})\cdot d\underline{r}$$

Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r}) \rightarrow$ skalares Feld div$\underline{A}(\underline{r})$.

div $\underline{A}(\underline{r})$ beschreibt die lokale Quellstärke des Vektorfeldes $\underline{A}(\underline{r})$.

Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r}) \rightarrow$ Vektorfeld rot $\underline{A}(\underline{r})$.

rot $\underline{A}(\underline{r})$ beschreibt die lokale Wirbelstärke des Vektorfeldes $\underline{A}(\underline{r})$.

Formal ergeben sich fünf Möglichkeiten für zweifache Anwendungen des Nabla-Operators

aus $\underline{\nabla}\,\phi(\underline{r}) = \mathrm{grad}\,\phi(\underline{r})$ $\rightarrow$ (1) $\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\,\phi(\underline{r}) = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi(\underline{r})$,

$\rightarrow$ (2) $\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\,\phi(\underline{r}) = \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi(\underline{r}) = 0$,

aus $\underline{\nabla}\cdot\underline{A}(\underline{r}) = \mathrm{div}\,\underline{A}(\underline{r})$ $\rightarrow$ (3) $\underline{\nabla}\,\underline{\nabla}\cdot\underline{A}(\underline{r}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\underline{A}(\underline{r})$,

aus $\underline{\nabla}\times\underline{A}(\underline{r}) =: \mathrm{rot}\,\underline{A}(\underline{r})$ $\rightarrow$ (4) $\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\times\underline{A}(\underline{r}) = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\underline{A}(\underline{r}) = 0$,

$\rightarrow$ (5) $\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\times\underline{A}(\underline{r}) = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{A}(\underline{r})$.

• (1) $\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\,\phi) = (\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla})\,\phi = \underline{\nabla}^2\phi =: \Delta\,\phi$ $\rightarrow$ das ist ein skalares Feld.

Der Operator $\Delta\,\phi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi$ heißt **Laplace-Operator**.

In kartesischen Koordinaten lautet seine Darstellung

$$\Delta =: (\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}) = \left(\underline{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\underline{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad .$$

Der Laplace-Operator kann auf die Komponenten eines Vektorfeldes angewendet werden. Dazu definieren wir

$$\Delta \underline{A} := \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \text{das ist ein Vektorfeld.}$$

•(2) Im Kapitel 6.2 haben wir schon bewiesen, dass

$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi(\underline{r}) = 0$ → **Gradientenfelder sind wirbelfrei**.

Umgekehrt gilt der Satz

<u>Theorem</u>: Ist das Vektorfeld $\underline{A}$ (in einem einfach zusammenhängenden Gebiet) wirbelfrei, rot $\underline{A}$ = 0, dann existiert ein skalares Feld ϕ, so dass $\underline{A}$ = grad ϕ .

ϕ heißt das zu $\underline{A}$ gehörende skalare Potenzial.

■ Beispiel: Konservative Kraftfelder

Konservative Kraftfelder $\underline{F}(\underline{r})$ sind solche, die sich als Gradient eines Potenzials $U(\underline{r})$ entsprechend $\underline{F}(\underline{r}) = -\mathrm{grad}\,U(\underline{r})$ darstellen lassen.

Ausgehend von der Newton´schen Bewegungsgleichung $m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$ finden wir $m\dot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}} \cdot \underline{F}$.

Die linke Seite der Gleichung lässt sich in der Form $\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2\right)$ darstellen. Ist $\underline{F}(\underline{r})$ ein konservatives Kraftfeld gilt für die vollständige Ableitung von $U(\underline{r})$ nach der Zeit

$$\frac{dU(\underline{r}(t))}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} = -\,\dot{\underline{r}}(t) \cdot \underline{F}(\underline{r}) \ .$$

Folglich ist $m\dot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}} \cdot \underline{F}$ für konservative Kraftfelder äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + U(\underline{r})\right] = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + U(\underline{r}) =: E = \mathrm{const}\ .$$

Interpretation: Bewegt sich eine Punktmasse m entlang ihrer Bahnkurve $\underline{r}(t)$ in einem konservativen Kraftfeld, dann bleibt die Summe aus kinetischer und potentieller Energie zu jedem Zeitpunkt konstant.

Fazit: Um zu testen, ob ein gegebenes Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$ konservativ ist oder nicht, berechnen wir seine Wirbelstärke. Finden wir in jedem Punkt eines einfach zusammenhängenden Gebiets $\text{rot}\,\underline{F}(\underline{r}) = 0$, so existiert dort ein skalares Feld $U(\underline{r})$ derart, dass $\underline{F}(\underline{r}) = -\,\text{grad}\,U(\underline{r})$.

Die explizite Berechnung von $U(\underline{r})$ behandeln wir im 8. Kapitel

•(3) $\underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) = \text{grad}\,\text{div}\,\underline{A}$ $\rightarrow$ das ist ein Vektorfeld.

•(4) Gilt $\underline{B}$ = rot $\underline{A}$, dann ist div $\underline{B}$ = div rot $\underline{A}$ = 0 → **Wirbelfelder sind quellenfrei**. (vgl. Kapitel 6.2).

Umgekehrt gilt:

Theorem: Ist das Vektorfeld $\underline{B}$ quellenfrei, also div $\underline{B}$ = 0, dann existiert ein Vektorfeld $\underline{A}$, so dass $\underline{B}$ = rot $\underline{A}$ gilt. $\underline{A}$ wird das zu $\underline{B}$ gehörende Vektorpotenzial genannt.

Das Vektorpotenzial ist nicht eindeutig bestimmt, da mit $\underline{A}(\underline{r})$ auch die Felder $\underline{A}(\underline{r}) + \text{grad}\chi(\underline{r})$ wegen $\text{rot}\,\text{grad}\chi(\underline{r}) = 0$ auf dasselbe Feld $\underline{B}$ führen (Eichinvarianz).

•(5) Wir wenden die Regel für das doppelte Vektorprodukt in der Form

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a} \cdot \underline{c}) - (\underline{a} \cdot \underline{b})\,\underline{c}$$

auf $\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{A}(\underline{r})$ an und erhalten

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{A} = \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) - (\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla})\underline{A} \quad \text{also} \quad \text{rot}\,\text{rot}\,\underline{A} = \text{grad}\,\text{div}\,\underline{A} - \Delta\,\underline{A}\,.$$

■ Für quellenfreie Felder (z.B. das Geschwindigkeitsfeld $\underline{u}(\underline{r}, t)$ inkompressibler Flüssigkeiten) gilt wegen div $\underline{u}$ = 0 dann $\text{rot}\,\text{rot}\,\underline{u} = -\Delta\,\underline{u}$.

Bisher haben wir den Gradienten, die Divergenz und die Rotation nur in kartesischen Koordinaten definiert. Im 7. Kapitel beschäftigen wir uns deshalb mit der Gestalt der Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinatensystemen.

6.4 Taylor-Entwicklung für Felder

Wir verallgemeinern die Potenzreihenentwicklung für Funktionen einer Veränderlichen an der Stelle $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + ... + = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x_0} (x - x_0)^n$$

oder in der Umgebung von x

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x} \Delta x + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x} (\Delta x)^2 + ... + = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x} (\Delta x)^n$$

auf Felder:

$$\phi(\underline{r} + \Delta\underline{r}) = \phi(\underline{r}) + \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\Delta x\,\Delta y + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\Delta x\,\Delta z + ...\right] +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + ...\right] + ... = \phi(\underline{r}) + \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\Delta x_j + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k \partial x_j}\Delta x_k\,\Delta x_j + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\phi}{\partial x_\ell \partial x_k \partial x_j}\Delta x_\ell\,\Delta x_k\,\Delta x_j + ... =$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\Delta x_j\,\partial_j)^n\right]\phi(\underline{r})$$

($j, k, \ell = 1,2,3$, $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$, $\partial_j := \frac{\partial}{\partial_j}$, Summenkonvention).

■ Als Beispiel entwickeln wir das skalare Feld $\phi(\underline{r}) = |\underline{a} - \underline{r}|$, $\underline{a} = \text{const}$ für (a >> r), also bezüglich des kleinen Parameters $\frac{r}{a}$ an der Stelle $\underline{r} = 0$ in eine Taylor-Reihe.

In niedrigster Näherung ist $\phi(\underline{r}) \sim \phi(0) = |\underline{a}| = a$.

Für die lineare Näherung benötigen wir die partiellen Ableitungen $\partial_j\,\phi$, also $\frac{\partial\phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ und $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ bei $\underline{r} = 0$. Da

$$|\underline{a} - \underline{r}| = \sqrt{(\underline{a} - \underline{r})\cdot(\underline{a} - \underline{r})} = (a^2 - 2\underline{a}\cdot\underline{r} + r^2)^{\frac{1}{2}}$$

ist, folgt beispielsweise

$$\frac{\partial}{\partial x}(a^2 - 2\underline{a}\cdot\underline{r} + r^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a^2 - 2\underline{a}\cdot\underline{r} + r^2)^{-\frac{1}{2}}(-2)(a_x - x) = -\frac{a_x - x}{|\underline{a} - \underline{r}|}$$

und analog für die Ableitungen nach y und z. Insgesamt erhalten wir

$$\partial_j |\underline{a} - \underline{r}| = -\frac{a_j - x_j}{|\underline{a} - \underline{r}|}.$$

Die Ableitung an der Stelle $\underline{r} = 0$ ist $-\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{\underline{a}}{a}$. Damit lautet die Entwicklung in

linearer Näherung $|\underline{a} - \underline{r}| \sim a - \frac{\underline{a}}{a}\cdot\underline{r} = a - \frac{\underline{a}\cdot\underline{r}}{a}$.

Für die quadratische Näherung werden die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung benötigt:

$$\partial_k(\partial_j |\underline{a} - \underline{r}|) = \partial_k\left(-\frac{a_j - x_j}{|\underline{a} - \underline{r}|}\right) = \frac{\delta_{kj}}{|\underline{a} - \underline{r}|} - (a_j - x_j)\frac{(-1)}{|\underline{a} - \underline{r}|^2}\partial_k |\underline{a} - \underline{r}| =$$

$$= \frac{\delta_{kj}}{|\underline{a} - \underline{r}|} - (a_j - x_j)\frac{(-1)}{|\underline{a} - \underline{r}|^2}\left(-\frac{a_k - x_k}{|\underline{a} - \underline{r}|}\right) = \frac{\delta_{kj}}{|\underline{a} - \underline{r}|} - \frac{(a_j - x_j)(a_k - x_k)}{|\underline{a} - \underline{r}|^3}.$$

An der Stelle $\underline{r} = 0$ ergibt sich $\frac{\delta_{kj}}{a} - \frac{a_j a_k}{a^3}$. Deshalb ist in quadratischer Näherung

$$|\underline{a} - \underline{r}| \sim a - \frac{\underline{a}}{a}\cdot\underline{r} = a - \frac{a_j x_j}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_{kj}}{a} - \frac{a_j a_k}{a^3}\right) x_k x_j$$

oder in Vektorschreibweise

$$|\underline{a} - \underline{r}| \sim a\left(1 - \frac{\underline{a}\cdot\underline{r}}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{(\underline{a}\cdot\underline{r})^2}{a^4}\right).$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir auf folgendem Wege: Da

$$\left|\underline{a}-\underline{r}\right| = \sqrt{a^2 - 2\underline{a}\cdot\underline{r} + r^2} = a\sqrt{1+x}\,, \quad x := \frac{r^2}{a^2} - 2\frac{\underline{a}\cdot\underline{r}}{a^2}\,,$$

können wir die Taylor-Entwicklung der Funktion $\sqrt{1+x}$ verwenden und erhalten

$$\left|\underline{a}-\underline{r}\right| = a\sqrt{1+x} \sim a\left(1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2\right).$$

Je nach gewünschter Näherung müssen die Terme nach Ordnungen $\frac{r}{a}$ sortiert werden. Das ergibt in linearer Näherung wieder $\left|\underline{a}-\underline{r}\right| \sim a\left(1-\frac{\underline{a}\cdot\underline{r}}{a^2}\right)$, denn der Term $\frac{r^2}{a^2}$ in $x = \frac{r^2}{a^2} - 2\frac{\underline{a}\cdot\underline{r}}{a^2}$ ist vernachlässigbar, und in quadratischer Näherung

$$\left|\underline{a}-\underline{r}\right| \sim a\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{a^2}-2\frac{\underline{a}\cdot\underline{r}}{a^2}\right)-\frac{1}{8}\left(-2\frac{\underline{a}\cdot\underline{r}}{a^2}\right)^2\right] = a\left(1-\frac{\underline{a}\cdot\underline{r}}{a^2}+\frac{1}{2}\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}}{a^2}-\frac{1}{2}\frac{(\underline{a}\cdot\underline{r})^2}{a^4}\right)$$

weil abgesehen von $\left(-2\frac{\underline{a}\cdot\underline{r}}{a^2}\right)^2$ alle Terme in x^2 von der Ordnung $\left(\frac{r}{a}\right)^3$ und $\left(\frac{r}{a}\right)^4$ sind, die in quadratischer Näherung vernachlässigt werden können.