7. Krummlinige Koordinaten

Motivation: Kartesische Koordinaten legen eindeutig einen Punkt im R^3 fest:
$\underline{r} = x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z = x_i\,\underline{e}_i$. Die Einheitsvektoren sind orthonormiert, $\delta_{ik} = \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k$, und ortsfest. Die Darstellung des Nabla-Operators lautet

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Häufig sind aber der Symmetrie eines physikalischen Systems/Problems angepasste, krummlinige Koordinaten, z.B. Zylinder- oder Kugelkoordinaten, besser als kartesische Koordinaten geeignet. Aus diesem Grunde betrachten wir nun Transformationen von kartesischen auf krummlinige Koordinaten.

7.1 Funktionaldeterminante einer Koordinatentransformation

Der Anschaulichkeit halber beschränken wir uns zunächst auf den ebenen, zweidimensionalen Fall. Die Transformationsformeln

$$\begin{matrix} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{matrix}$$

für die Hin- und Rücktransformation sollen lokal eindeutig sein.

Wir betrachten die Umgebung $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ eines Punktes $P(x,y)$. Aus der Taylor-Entwicklung in P(x,y) folgt in linearer Näherung (bzgl. Δx und Δy)

$$\Delta u := u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \cong \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$
$$\Delta v := v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) \cong \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$$

Zu jedem Paar (Δx, Δy) in der Umgebung des P(x,y) existiert ein wohlbestimmtes Paar (Δu, Δv) in der Umgebung des Punktes P(u,v). Damit dies auch umgekehrt der Fall, die Koordinatentransformation also in der Umgebung von P eineindeutig ist, muss die Koeffizientendeterminante des obigen inhomogenen linearen Gleichungssystems ungleich Null sein (→ Kramer´sche Regel).

Def.: Die aus den partiellen Ableitungen der Funktionen u(x,y) und v(x,y) nach x und y gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} =: \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

heißt **Funktionaldeterminante** der Koordinatentransformation u = u(x,y), v = v(x,y). Die oben betrachteten Transformationsformeln beschreiben in der Umgebung eines Punktes P genau dann eine eineindeutige Zuordnung (x,y) $\leftrightarrow$ (u,v), wenn $\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P(x,y)} \neq 0$ und ganz analog für die Rücktransformation $\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{P(u,v)} \neq 0$.

■ Beispiel: Ebene Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi - (-r\sin^2\varphi) = r.$$

$$\frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{r^3} - \left(-\frac{y^2}{r^3}\right) = \frac{x^2+y^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

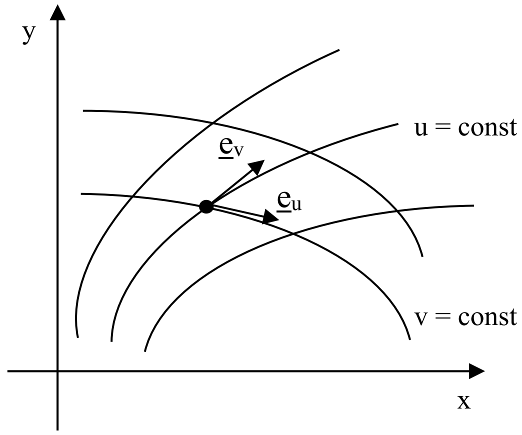
Die Koordinatenformation ist für alle Punkte der Ebene mit Ausnahme von r = 0 eindeutig.

7.2 Nabla-Operator in krummlinigen Koordinaten

• Einheitsvektoren $\underline{e}_u$ und $\underline{e}_v$.

Wir betrachten wieder den zweidimensionalen Fall

$$\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\} \underline{r} = \underline{r}(u,v)$$



Entlang der Koordinatenlinie v = const ändert sich nur die Variable u. Die Ableitung $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}$ zeigt in einem Punkt P in Richtung der Tangenten zu v = const im Punkt P. Analog ist der Vektor $\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$ tangential zur Koordinatenlinie u = const gerichtet. Aus den Tangentialvektoren bilden wir die beiden normierten EHV

$$\underline{e}_u := \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|}, \quad \underline{e}_v := \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right|} .$$

• Der Abstand zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten $\underline{r}$ und $\underline{r} + d\underline{r}$ mit den krummlinigen Koordinaten (u, v) und (u + du, v + dv) ist (Taylor-Entwicklung)

$$d\underline{r} = \underline{r}(u+du, v+dv) - \underline{r}(u,v) = \overbrace{\underline{r}(u+du, v+dv) - \underline{r}(u+du, v)}^{u+du=\text{const}} + \underbrace{\underline{r}(u+du, v) - \underline{r}(u,v)}_{v=\text{const}} \cong$$

$$\cong \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\,dv + \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\,du = \underline{e}_v \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right| dv + \underline{e}_u \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right| du .$$

Also lässt sich $d\underline{r}$ (wie im kartesischen Fall) aus zwei Teilvektoren zusammensetzen, die jeweils in die Richtung zeigen, in der sich nur eine Koordinate ändert. Das Quadrat der Länge von $d\underline{r}$ (das sogenannte Linienelement) ist gleich

$$(d\underline{r})^2 = g_{ij}\, du_i\, du_j \quad \text{wobei} \quad g_{ij} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j}$$

Um die Summenkonvention (i, j = 1, 2) verwenden zu können, haben wir u durch u_1 und v durch u_2 ersetzt. Im räumlich dreidimensionalen Fall (i, j = 1, 2, 3) bleibt alles gültig; die dritte Koordinate w wird als u_3 bezeichnet.

Betrachten wir nun krummlinig-**orthogonale** Koordinaten, bei denen die Koordinatenlinien in jedem Punkt senkrecht aufeinander stehen. Beispiele für krummlinig-orthogonale Koordinaten sind ebene Polarkoordinaten oder Kugel- oder sphärische Koordinaten.
Dann ist $\underline{e}_{u_i} \cdot \underline{e}_{u_j} = \delta_{ij}$, $g_{ij} = g_i^2\, \delta_{ij}$ und im ebenen Fall folgt

$$(d\underline{r})^2 = g_u^2\, (du)^2 + g_v^2\, (dv)^2$$

mit den metrischen Koeffizienten

$$g_u =: \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \right| \text{ und } g_v =: \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right| . \quad \rightarrow \textbf{metrischen Koeffizienten}$$

• Zur Bestimmung der Komponenten des Nabla-Operators in krummlinigen Koordinaten gehen wir von der koordinaten-unabhängigen Definition des Gradienten

$$d\phi(\underline{r}) = \operatorname{grad} \phi(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$$

aus. Wählt man $\underline{dr}$ entlang der Koordinatenlinie v = const, folgt für die Richtungsableitung in u Richtung

$$(\operatorname{grad}\phi)_u = \underline{e}_u \cdot \operatorname{grad}\phi = \frac{1}{g_u}\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \cdot \operatorname{grad}\phi = \frac{1}{g_u}\left(\overbrace{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial z}}_{\text{entfällt in 2d}}}^{\text{Skalarprodukt}} \right) = \overbrace{\frac{1}{g_u}\frac{\partial \phi}{\partial u}}^{\text{Kettenregel}}$$

Beachte im letzten Schritt: $\phi(x,y,z) = \phi(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$.

Analog gehen wir für die Komponenten $(\text{grad}\,\phi)_v$ und $(\text{grad}\,\phi)_w$ (im dreidimensionalen Fall) vor. Insgesamt finden wir so die Darstellung

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_u \frac{1}{g_u}\frac{\partial}{\partial u} + \underline{e}_v \frac{1}{g_v}\frac{\partial}{\partial v} + \underline{e}_w \frac{1}{g_w}\frac{\partial}{\partial w} \quad .$$

Fazit: In <u>krummlinig-orthogonalen Koordinaten</u> hat der Nabla-Operator die Komponenten $\frac{1}{g_u}\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{1}{g_v}\frac{\partial}{\partial v}$ und $\frac{1}{g_w}\frac{\partial}{\partial w}$. Die Einheitsvektoren $\underline{e}_u$, $\underline{e}_v$ und $\underline{e}_w$ hängen von den Koordinaten u, v und w ab! Sie stehen im Ausdruck für $\underline{\nabla}$ deshalb links von den Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$ und $\frac{\partial}{\partial w}$. Für alle Vektoren $\underline{A} = A_u \underline{e}_u + A_v \underline{e}_v + A_w \underline{e}_w$ sind i.a. sowohl die Komponeten $A_u = \underline{A} \cdot \underline{e}_u$, $A_v := \underline{A} \cdot \underline{e}_v$ und $A_w := \underline{A} \cdot \underline{e}_w$ als auch die Einheitsvektoren ortsabhängig.

In kartesischen Koordinaten $\underline{r} = x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z$ hatten wir dagegen

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \text{ mit ortsfesten Einheitsvektoren } \underline{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \underline{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \underline{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

also unabhängig von x, y, z.

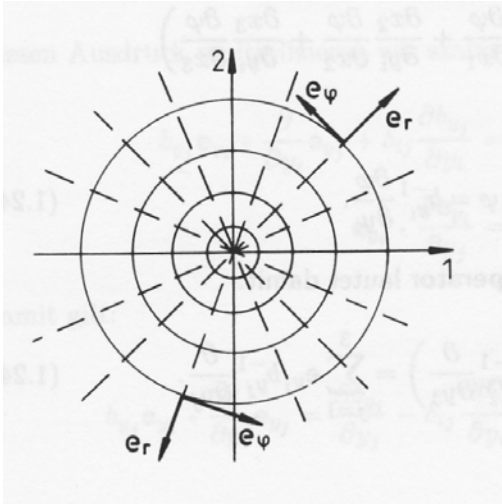
In ähnlicher Weise werden die Differentialoperatoren div, rot und der Laplace-Operator in krummlinig orthogonalen Koordinaten bestimmt. Wir werden vor allem die Ergebnisse für ebene Polarkoordinaten sowie für Zylinder- und Kugelkoordinaten benötigen.

7.3 Ebene Polarkoordinaten

• Transformation:

$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin\varphi$



• Koordinatenlinien

r = const $\rightarrow$ konzentrische Kreise

φ = const $\rightarrow$ vom Ursprung ausgehende Geraden

• Einheitsvektoren (Basis)

- rein geometrisch erkennen wir aus der Skizze leicht

$$\underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Der EHV $\underline{e}_r$ ist tangential zur Koordinatenlinie φ = const, der EHV $\underline{e}_\varphi$ tangential zu r = const gerichtet; beide sind nicht ortsfest!

Die Rechnung bestätigt die Ergebnisse. Beispielsweise finden wir für $\underline{e}_\varphi = \dfrac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right|}$ mit

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial(x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y)}{\partial \varphi} = \frac{\partial(r\cos\varphi\,\underline{e}_x + r\sin\varphi\,\underline{e}_y)}{\partial \varphi} = -r(\sin\varphi\,\underline{e}_x + \cos\varphi\,\underline{e}_y) = r\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = r$$

$$\underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ und analog } \underline{e}_r = \frac{\partial \underline{r}}{\partial r}\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial r}\right|^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

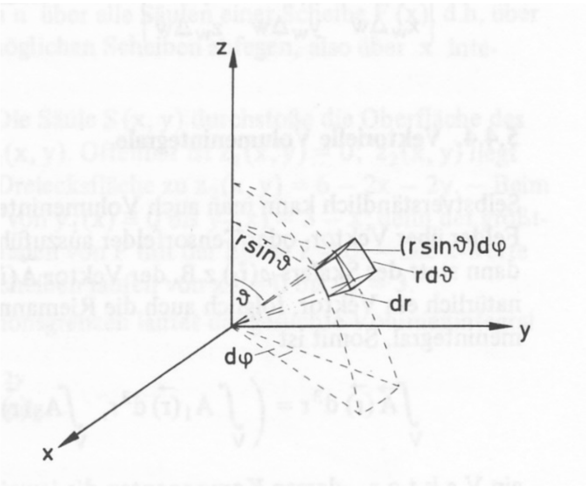
Ebene Polarkoordinaten sind krummlinig-orthogonal, $\underline{e}_r \cdot \underline{e}_\varphi = -\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi = 0$

• metrische Koeffizienten: $g_r = 1$, $g_\varphi = r$

• Nabla-Operator: $\underline{\nabla} = \underline{e}_r \dfrac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\varphi \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$

7.4 Kugelkoordinaten

(vgl. Übung)



Transformation:

$x = r\ \sin\vartheta \cos\varphi$

$y = r\ \sin\vartheta \sin\varphi$

$z = r \cos\vartheta$

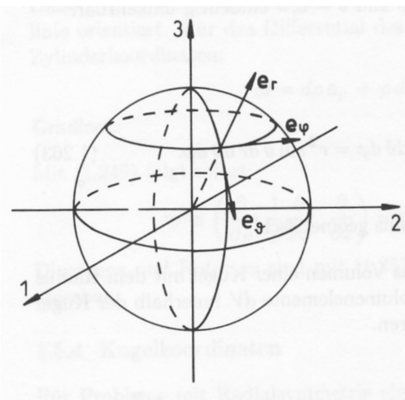
Koordinatenlinien

$\varphi, \vartheta\ = \text{const}\ \rightarrow$ vom Ursprung ausgehende Strahlen: $0 \leq r < \infty$,

$r, \vartheta = \text{const} \rightarrow$ zur x-y-Ebene parallele Kreise mit Zentrum auf der z-Achse: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$r, \varphi = \text{const} \rightarrow$ Halbkreis mit Zentrum im Ursprung durch z-Achse berandet: $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

Basis



$$\underline{e}_r = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial r}\right|} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix},\ \underline{e}_\vartheta = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial \vartheta}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \vartheta}\right|} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix},\ \underline{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right|} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsvektoren sind von φ und ϑ-abhängig (**also nicht ortsfest**), aber orthogonal.

Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2 \sin^2\vartheta\ \sin\vartheta\ \cos^2\varphi + r^2 \sin^3\vartheta\ \sin^2\varphi + r^2 \cos^2\vartheta\ \sin\vartheta\ \sin^2\varphi + r^2 \sin^3\vartheta\ \cos^2\varphi = r^2 \sin\vartheta\ .$$

metrische Koeffizienten: $g_r = 1,\ g_\vartheta = r,\ g_\varphi = r\sin\vartheta \quad \rightarrow$

Nabla-Operator: $\underline{\nabla} = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$

Da die EHV von φ und ϑ abhängen, müssen sie links von den Ableitungen stehen!

■ Beispiel: Gradient eines kugelsymmetrischen Skalarfelds:

$$\operatorname{grad}\phi(r) = \underline{\nabla}\,\phi(r) = \frac{\partial\phi(r)}{\partial r}\,\underline{e}_r = \phi'(r)\frac{\underline{r}}{r}.$$

"Umständlicher":

$$\operatorname{grad}\phi(r) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\underline{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\underline{e}_z = \frac{d\phi}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\underline{e}_x + \ldots = \frac{d\phi}{dr}\frac{x}{r}\underline{e}_x + \ldots = \frac{d\phi}{dr}\left(\frac{x}{r}\underline{e}_x + \frac{y}{r}\underline{e}_y + \frac{z}{r}\underline{e}_z\right) = \phi'(r)\frac{\underline{r}}{r}$$

Laplace-Operator (Übungszettel):

$$\Delta\phi = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\,\phi = (\ldots)\cdot(\ldots) = \ldots\text{Produktregel}\ldots = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\,\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2\varphi}$$

Für ein kugelsymmetrisches Skalarfeld finden wir die drei identischen Ausdrücke (Übungszettel)

$$\Delta\phi(r) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\,\phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)$$