Prof. Dr. Andreas Knorr
Mathias Hayn, Marc Hennes, Helge Neitsch, Jan F. Totz, Kilian Kuhla, Anke Zimmermann

8. Übungsblatt – Quantenmechanik I

Abgabe: Fr. 14.06.2013 bis 11:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!

Aufgabe 15 (20 Punkte): *Rabioszillationen im Zwei-Niveau-System*

In der VL wurde das Zwei-Niveau-System (ZNS) mit Ankopplung der Elektronen an ein externes, zeitlich veränderliches elektrisches Feld eingeführt. Es seien die beiden Niveaus durch die reellen Eigenfunktionen $\phi_1(\vec{r})$ und $\phi_2(\vec{r})$ zu den Energie-Eigenwerten ϵ_1 und ϵ_2 des ungestörten Hamilton-Operators $\mathscr{H}_{\text{Atom}}$ gegeben.

1) Zeigen Sie, dass der Ansatz $\Psi(\vec{r},t) = c_1(t)\phi_1(\vec{r}) + c_2(t)\phi_2(\vec{r})$ den Hamilton-Operator mit Feldkopplung $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\text{Atom}} - \vec{d}\cdot\vec{E}(t)$ auf Differenzialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} i\hbar\,\dot{c}_1(t) &= \tilde{\epsilon}_1 c_1(t) + W_{12}(t)c_2(t),\\ i\hbar\,\dot{c}_2(t) &= \tilde{\epsilon}_2 c_2(t) + W_{21}(t)c_1(t) \end{aligned}$$

führt. Die Matrixelemente $W_{ij}(t) = -\int d^3r\,\phi_i^*(\vec{r})\,\vec{d}\vec{E}(t)\,\phi_j^*(\vec{r})$ mit $i,j \in \{1,2\}$ beschreiben den Beitrag des externen Feldes in der Basis der Eigenfunktionen von $\mathscr{H}_{\text{Atom}}$. Das Dipolmoment $\vec{d} = -e_0\vec{r}$ beschreibt einen atomaren Dipol mit Ladung $-e_0$ und Ort $\vec{r}$ des Elektrons.

2) Leiten Sie damit das Differenzialgleichungssystem für die Besetzungsdichte $f_{22}(t) = c_2^*c_2$ des Zustandens ϕ_2 und die feldinduzierten Übergangsamplitude $p_{12}(t) = c_1^*c_2$ [für $\phi_1 \to \phi_2$] her:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{12}(t) &= -i(\omega_2-\omega_1)p_{12}(t) + i\Omega(t)(1-2f_{22}(t)),\\ \dot{f}_{22}(t) &= \quad 2\,\mathsf{Im}[\Omega(t)p_{12}(t)]. \end{aligned}$$

Hierbei sind $\omega_{1,2} = \tilde{\epsilon}_{1,2}/\hbar$ und $\Omega(t) = -W_{12}(t)/\hbar$ ist die *Rabifrequenz*.

3) Es sei die langsam veränderliche Einhüllende der Rabifrequenz $\tilde{\Omega}(t)$ durch $\Omega(t) = \tilde{\Omega}(t)\cos(\omega_{\mathsf{L}}t)$ definiert, wobei ω_{L} gerade die Frequenz der Trägerschwingung der Anregung ist (Lichtwelle). Eine ähnliche Zerlegung gelte für $p_{12}(t) = \tilde{p}_{12}(t)e^{-i\omega_{\mathsf{L}}t}$. Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in diesen langsam rotierenden Größen und führen Sie die sogenannte Rotating-Wave Approximation (RWA) durch, indem Sie Rotationen mit doppelter Lichtfrequenz vernachlässigen. Verwenden Sie die Verstimmungsfrequenz (detuning) $\Delta = \omega_2 - \omega_1 - \omega_{\mathsf{L}}$ um

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_{12}(t) &= -i\Delta\tilde{p}_{12}(t) + \frac{i}{2}\tilde{\Omega}(t)(1-2f_{22}(t)),\\ \dot{f}_{22}(t) &= \quad \mathsf{Im}[\tilde{\Omega}(t)\tilde{p}_{12}(t)] \end{aligned}$$

zu finden.

4) Betrachten Sie den Fall resonanter Anregung ($\Delta = 0$) mit reellem $\tilde{\Omega}(t)$. Benutzen Sie hier und für die folgenden Aufgabenteile die Anfangsbedingung: $f_{22}(-\infty) = \tilde{p}_{12}(-\infty) = 0$. Lösen Sie explizit das obige Gleichungssystem für $\tilde{p}_{12}(t)$ und $f_{22}(t)$, indem Sie die Größe $\Theta(t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau\,\tilde{\Omega}(\tau)$ einführen [Lösung: $\tilde{p}_{12}(t) = i\sin(\tilde{\Theta}(t))/2$]. Berechnen Sie hiermit $f_{22}(t)$.

5) Diskutieren Sie die Lösung ausführlich! In welchem Endzustand befindet sich das System, wenn die Pulsfläche $\Theta = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \tilde{\Omega}(t)$ gerade die Werte $\pi/2$, π und 2π annimmt?

6) Bestimmen und vergleichen Sie für folgende Pulsformen die analytischen Lösungen und plotten Sie $f_{22}(t)$ und Im$[\tilde{p}_{12}(t)]$ über $t = -10\,\text{ps}...10\,\text{ps}$ für $t_0 = 5\,\text{ps}$ und $A = 3\pi$.

$$\tilde{\Omega}(t) = \begin{cases} A/t_0 & \text{für } -t_0 < t < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\tilde{\Omega}(t) = \begin{cases} A\pi/(2t_0)\cos(\pi t/t_0) & \text{für } -t_0/2 < t < t_0/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Vorlesung:

Di. um 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201
Mi. um 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201

Website:

Auf http://www.tu-berlin.de und dann Direktzugang: **131886**

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
- Bestandene Klausur.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- R. P. Feynman: „Vorlesungungen über Physik - Band III - Quantenmechanik“
- T. Fließbach: „Quantenmechanik“
- F. Schwabl: „Quantenmechanik - Eine Einführung“
- W. Greiner: „Quantenmechanik - Einführung“
- R. Shankar: „Principles of Quantum Mechanics“
- J. J. Sakurai: „Modern Quantum Mechanics“
- N. Zettili: „Quantum Mechanics - Concepts and Applications“

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. Andreas Knorr	Di	13:00 – 14:00 Uhr	EW 742	24255
Mathias Hayn	Mi	14:00 – 16:00 Uhr	EW 711	27884
	Mi	11:00 – 12:00 Uhr		
Marc Hennes	Mi	13:00 – 14:00 Uhr	EW 702	
Helge Neitsch	Fr	10:00 – 11:00 Uhr	EW 269	28852
Jan F. Totz	Mi	12:00 – 13:00 Uhr	EW 627	27681
Kilian Kuhla	Di	11:00 – 12:00 Uhr	EW 60	26143
Anke Zimmermann	Mi	11:30 – 12:30 Uhr	EW 60	26143