

Prof. Dr. Harald Engel
Jan F. Tutz, MSc

1. Übungsblatt – Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Fr. 8.11.2013 10:00 Uhr vor der Vorlesung im EW 203

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 1 (20 Punkte): *Thermokonvektion, Lorenz-Gleichungen*

Aus den hydrodynamischen Gleichungen für die Konvektion einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeitsschicht (vgl. Vorlesung Kap. 1.2) leitete Edward Lorenz [J. Atmos. Sci. 20, 130 (1963)] näherungsweise folgendes System aus drei gekoppelten nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen ab:

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= -\sigma u + \sigma v \\ \frac{dv}{d\tau} &= -v + ru - uw \\ \frac{dw}{d\tau} &= -bw + uw\end{aligned}\tag{1}$$

Hier bezeichnen u , v , w die dimensionslosen Amplituden von Fourier-Moden, die proportional zur Konvektionsgeschwindigkeit, zur Temperaturdifferenz zwischen aufsteigender und absinkender Flüssigkeit bzw. zur Abweichung vom linearen Temperaturprofil des Wärmeleitungsregimes sind. Die Bedeutung der Parameter wird im Paper erörtert (S. 134-135).

- (1) Zeigen Sie, dass das Phasenvolumen für das Lorenz-System mit konstanter Rate $-(\sigma + b + 1)$ kontrahiert.
- (2) Bestimmen Sie die Fixpunkte des Lorenz-Systems und diskutieren Sie deren Stabilität bzgl. infinitesimal kleiner Störungen in Abhängigkeit vom Bifurkationsparameter r .
- (3) Beweisen Sie folgende Behauptung: Der Lorenz-Attraktor wird im Phasenraum durch eine Kugel mit Mittelpunkt bei $(0, 0, r + \sigma)^T$ und Radius R (zunächst beliebig) umschlossen. Erläutern Sie die Bedeutung der Aussage in Bezug auf das Verhalten der Trajektorien im System.
- (4) Numerische Integration: Lorenz hat seine Gleichungen für $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28 > r_T = \frac{470}{19} = 24,74$ numerisch integriert. Plotten Sie die Fixpunkte $\{(0, 0, 0)^T, (\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)^T\}$ und genügend Trajektorien zur Visualisierung des Attraktors. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse sehr ausführlich. Verwenden Sie zur numerischen Integration entweder Mathematica oder C/C++ mit gnuplot und fügen Sie den Quellcode Ihrer Abgabe bei.

1. Übung TPVI WS13/14

Vorlesung:

- Do 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
- Fr 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.

Übung:

- Mo 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 114.

Website:

- <http://www.tu-berlin.de/?137712>

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- A. S. Mikhailov, Foundations of Synergetics I. Distributed Active Systems (Springer)
- J. L. Klimontovich, Statistical Physics (Harwood Academic Publishers)
- P. Glansdorff, I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations (Wiley)
- G. Nicolis, I. Prigogine, Self-organization in non-equilibrium systems (Wiley)
- J. D. Murray, Mathematical Biology (Springer)
- A. A. Andronov, A. A. Witt, S. E. Chaikin, Theorie der Schwingungen (Teile I und II) (Akademie-Verlag)
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions (Springer)
- H. Haken, Synergetics. Introduction and Advanced Topics (Springer)
- Steven H. Strogatz, Nonlinear Dynamics And Chaos (Westview Press)