Prof. Dr. Harald Engel
Jan F. Totz, MSc

3. Übungsblatt – Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Fr. 22.11.2013 10:00 Uhr vor der Vorlesung im EW 203
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 3 (6 Punkte): *Oszillierende chemische Reaktion: Brüsselator*
Der Brüsselator ist ein einfaches Modell zur theoretischen Beschreibung eines chemischen Oszillators:

$$\dot{x} = 1 - (b+1)\,x + ax^2y \tag{1}$$
$$\dot{y} = bx - ax^2y \tag{2}$$

mit Parametern $a, b > 0$ und x, y als dimensionslosen Konzentrationen.

(a) Finden Sie alle Fixpunkte und klassifizieren Sie diese.

(b) Skizzieren Sie den Phasenraum per Hand, indem Sie Fixpunkte, Nullklinen und repräsentative Trajektorien einzeichnen.

(c) Bestimmen Sie den Bifurkationspunkt $b = b_c$ der Hopf-Bifurkation.

(d) Existiert der Grenzzyklus für $b > b_c$ oder $b < b_c$ Handelt es sich um eine super- oder subkritische Bifurkation? Verwenden Sie für den Beweis das Poincaré-Bendixson-Theorem.

(e) Bestimmen Sie näherungsweise die Periode des Grenzzyklus bei $b = b_c$.

Aufgabe 4 (7 Punkte): *Stabilität eines Grenzzyklus gegen infinitesimal kleine Störungen*

(a) Untersuchen Sie die Stabilität der Fixpunkte und der periodischen Lösungen des ebenen autonomen dynamischen Systems

$$\frac{dx}{dt} = -y + \left[\mu - \left(x^2 + y^2\right)\right] x \tag{3}$$
$$\frac{dy}{dt} = x + \left[\mu - \left(x^2 + y^2\right)\right] y. \tag{4}$$

Bestimmen Sie dazu die Eigenwerte des Fixpunktes und die Floquet-Multiplikatoren des Grenzzyklus.

(b) Kanonisch-dissipative Systeme:
Unter welchen Bedingungen an die Funktionen $f\,(H)$ und $H\,(x, y)$ besitzt das ebene dynamische System

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} + f\,(H)\,\frac{\partial H}{\partial x} \tag{5}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} + f\,(H)\,\frac{\partial H}{\partial y} \tag{6}$$

Grenzzyklus-Lösungen?

Aufgabe 5 (7 Punkte): *Schwalbenschwanz-Verzweigung*
Die Potentialfunktion

$$V\left(x;\underline{\mu}\right)=\frac{x^5}{5}+\mu_1\frac{x^3}{3}+\mu_2\frac{x^2}{2}+\mu_3 x \tag{7}$$

ist die universelle Entfaltung der entarteten Singularität $x=0$ von $V\left(x;0,0,0\right)=x^5/5$.

(a) Zeichnen Sie die ebenen Schnitte durch das Bifurkationsnetz durch (μ_1,μ_2,μ_3)-Kontrollraum C^3 bei konstanten Werten $\mu_1<0, \mu_1=0$ und $\mu_1>0$ und tragen Sie die Konfigurationen der Fixpunkte des dynamischen Systems

$$\frac{dx}{dt}=-\mathrm{grad}\ V\left(x;\underline{\mu}\right) \tag{8}$$

in den einzelnen Bereichen der (μ_2,μ_3)-Ebene ein.

(b) Überzeugen Sie sich, dass die parametrische Darstellung der Menge aller cusp-Punkte gegeben ist durch

$$\mu_1=-6a^2,\ \mu_2=-8a^3,\ \mu_3=-3a^4. \tag{9}$$

Vorlesung:	• Do 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203. • Fr 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
Übung:	• Mo 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 114.
Website:	• http://www.tu-berlin.de/?137712
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- A. S. Mikhailov, Foundations of Synergetics I. Distributed Active Systems (Springer)
- J. L. Klimontovich, Statistical Physics (Harwood Academic Publishers)
- P. Glansdorff, I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations (Wiley)
- G. Nicolis, I. Prigogine, Self-organization in non-equilibrium systems (Wiley)
- J. D. Murray, Mathematical Biology (Springer)
- A. A. Andronov, A. A. Witt, S. E. Chaikin, Theorie der Schwingungen (Teile I und II) (Akademie-Verlag)
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions (Springer)
- H. Haken, Synergetics. Introduction and Advanced Topics (Springer)
- Steven H. Strogatz, Nonlinear Dynamics And Chaos (Westview Press)