Prof. Dr. Harald Engel
Jan F. Totz, MSc

5. Übungsblatt – Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Fr. 6.12.2013 10:00 Uhr vor der Vorlesung im EW 203
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 8 (10 Punkte): *Brüsselator II*
Die zu einem Reaktions-Diffusionssystem erweiterten Brüsselator-Gleichungen (vgl. Übungsblatt 3) lauten:

$$\dot{x} = a - (b+1)\,x + x^2 y + D_x \nabla^2 x, \tag{1}$$
$$\dot{y} = bx - x^2 y + D_y \nabla^2 y. \tag{2}$$

Dabei sind a, b, D_x und D_y positive Parameter.

(a) Linearisieren Sie um den Fixpunkt $(a, b/a)$. Leiten Sie die Dispersionsrelation

$$\lambda^2 + \alpha(q)\lambda + \beta(q) = 0 \tag{3}$$

im räumlich unbeschränkten Fall her. Dabei gilt für die Störungen: $\delta x, \delta y \propto \exp(iqx - \lambda t)$. Wie lauten $\alpha(q)$ und $\beta(q)$ explizit?

(b) Welche Bifurkationen treten auf, wenn man annimmt, dass es entweder einen Vorzeichenwechsel gibt (i) in $\alpha(q)$ oder (ii) in $\beta(q)$. Wie ändert sich das System qualitativ? Welche kritischen Wellenzahlen q_c sind mit den Bifurkationen assoziiert?

(c) Was muss für $\gamma = \sqrt{D_x/D_y}$ gelten, damit die Hopf-Bifurkation vor der Turing-Bifurkation auftritt? Wie lässt sich diese Bedingung interpretieren?

Aufgabe 9 (10 Punkte): *SNIPER-Bifurkation*
Wie in der Vorlesung diskutiert, beschreibt die Hopf-Bifurkation einen Übergang von stationärem zu oszillatorischem Verhalten. Einen alternativen Übergang bietet die SNIC-Bifurkation (Saddle-Node on Invariant Circle); auch bekannt als SNIPER-Bifurkation (Saddle-Node Infinite PERiod). Betrachten Sie das ebene dynamische System mit dem Parameter $b \in \mathbb{R}_0^+$ in Polarkoordinaten:

$$\dot{r} = r\left(1 - r^2\right), \tag{1}$$
$$\dot{\phi} = b - r\cos\phi. \tag{2}$$

(a) Untersuchen Sie die Fixpunkte des reduzierten Systems mit $r = 1$ in Abhängigkeit vom Parameter b (Existenz, Position, Stabilität). Zeigen Sie, dass die Osillationsfrequenz wurzelförmig mit Abstand zum Bifurkationspunkt anwächst (charakteristisch für SNIPER Bifurkation).

(b) Finden Sie die Lösungen $\phi(t)$ durch Trennung der Variablen für $b < 1$ und $b > 1$. Benutzen Sie hierfür

$$\int \frac{d\phi}{b - \cos\phi} = \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \arctan\frac{(b-1)\tan(\phi/2)}{\sqrt{b^2-1}} \qquad \text{für } b > 1, \tag{3}$$
$$\int \frac{d\phi}{b - \cos\phi} = \frac{2}{\sqrt{1-b^2}} \log\left[\frac{(1+b)\tan(\phi/2) - \sqrt{1-b^2}}{(1+b)\tan(\phi/2) + \sqrt{1-b^2}}\right] \qquad \text{für } b < 1. \tag{4}$$

(c) Plotten Sie für die beiden Fälle $b < 1$ und $b > 1$ die Zeitserien für $x(t) = \cos\phi(t)$ mit geeigneten Anfangsbedingungen.

Vorlesung:	• Do 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203. • Fr 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
Übung:	• Mo 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 114.
Website:	• http://www.tu-berlin.de/?137712
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- A. S. Mikhailov, Foundations of Synergetics I. Distributed Active Systems (Springer)
- J. L. Klimontovich, Statistical Physics (Harwood Academic Publishers)
- P. Glansdorff, I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations (Wiley)
- G. Nicolis, I. Prigogine, Self-organization in non-equilibrium systems (Wiley)
- J. D. Murray, Mathematical Biology (Springer)
- A. A. Andronov, A. A. Witt, S. E. Chaikin, Theorie der Schwingungen (Teile I und II) (Akademie-Verlag)
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions (Springer)
- H. Haken, Synergetics. Introduction and Advanced Topics (Springer)
- Steven H. Strogatz, Nonlinear Dynamics And Chaos (Westview Press)