

VL: Prof. Dr. Ekehard Schöll, PhD  
UE: Dr. Anna Zakharova, M.Sc. Jan Tötz

## 1. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

**Abgabe:** Mi 29.04. 12:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**.  
*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.*

### **Aufgabe 1 (10 Punkte):** Lotka-Volterra-Modell

Mit den Lotka-Volterra-Gleichungen lassen sich Populationsdynamiken beschreiben. Hier betrachten wir die Wechselwirkungen zwischen einer Population von Schildläusen und Marienkäfer:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= rS - \alpha SM \\ \dot{M} &= -qM + \beta SM\end{aligned}$$

mit  $r > 0$ ,  $q > 0$ ,  $\alpha > 0$  und  $\beta > 0$ .  $S$  bzw.  $M$  beschreibt die Anzahl der Läuse bzw. Marienkäfer.

- Kommentieren Sie die biologische Bedeutung der einzelnen Terme.
- Finden Sie die Fixpunkte und charakterisieren Sie diese (stabil/instabil, Fokus/Sattel/Knoten). Gibt es Fälle, in denen die lineare Stabilitätsanalyse versagt?
- Finden Sie eine Konstante der Bewegung  $c(S, M)$ , indem Sie durch Trennung der Variablen  $\frac{dS}{dM}$  integrieren.
- Skizzieren Sie den Phasenraum. Zeichnen Sie die Nullklinen und die Fixpunkte ein. Warum genügt es, den ersten Quadranten zu betrachten? Zeichnen Sie auch Höhenlinien ein, d.h. Linien konstanten  $c(S, M) = c_0$  ein. Sie können gerne dafür den Computer verwenden. Zum Beispiel kann die Funktion `VectorFieldPlot` verwendet werden, um mit Mathematica Vektorfelder zu plotten. Die Funktion `ContourPlot` hilft bei den Höhenlinien. Die Parameter können Sie zum Beispiel wie folgt wählen:  $\alpha = \beta = 0.01$ ,  $r = 0.1$  und  $q = 0.5$ . Sinnvolle Werte für die Höhenlinien sind dann  $c_0 = -1.3$ ,  $c_0 = -1.4$  und  $c_0 = -1.5$ . Was können Sie nun über den Fixpunkt sagen, den Sie unter c) nicht vollständig bestimmen konnten?
- Was passiert, wenn zur Bekämpfung der Läuseplage Insektizide eingesetzt werden? Betrachten Sie dafür ein leicht erweitertes Modell:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= rS - \alpha SM - kS \\ \dot{M} &= -qM + \beta SM - kM\end{aligned}$$

wobei  $k > 0$  die Sterberate der Schildläuse und Marienkäfer bedingt durch den Insektizideinsatz ist. Wie verschieben sich die Fixpunkte? Nehmen Sie  $r > k$  an. Interpretieren Sie das Ergebnis.

### **Aufgabe 2 (10 Punkte):** Van-der-Pol-Oszillator

Van der Pol untersuchte in den 30er Jahren einen harmonischen Oszillator mit einem nichtlinearen Dämpfungsterm

$$\ddot{x} + \kappa(x^2 - a)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\kappa \geq 0).$$

Wenn  $a > 0$  ist, verhält sich der Dämpfungsterm für große Amplituden wie eine Reibung, wechselt aber für kleine Amplituden das Vorzeichen und führt so zu Schwingungen mit endlicher Amplitude.

## 1. Übung SS15

1. Schreiben Sie die Gleichung als System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit  $y = \dot{x}$  und finden Sie die Fixpunkte und deren Stabilität.
2. Lösen Sie die Gleichungen numerisch für  $\kappa = 1$ ,  $\omega_0 = 1$  und 1000 verschiedenen  $a$  Werten aus  $[-1, 1]$ . Lassen Sie in jeder Simulation eine transiente Zeit verstreichen (ca. 100 Zeiteinheiten) und tragen Sie dann Maxima und Minima von  $x$  über den  $a$  Werten auf, um so ein Bifurkationsdiagramm zu erhalten.  
Plotten Sie ausserdem das Phasen-Portrait in der  $(x, y)$ -Ebene für  $a = 0.1$ ,  $a = 1$ ,  $a = 2$ . Erläutern Sie das Verhalten des Oszillators, wenn  $a$  verändert wird.

<b>Vorlesung:</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Dienstag 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.</li><li>• Donnerstag 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.</li></ul>
<b>Übung:</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Mittwoch, 12:15 – 13:45 Uhr im EW 731.</li></ul>
<b>Anmeldung:</b>	Die Punkteverteilung und Scheinvergabe zu der Vorlesung "Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle" erfolgt über das Moseskontosystem: <a href="https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto">https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto</a> .
<b>Webseiten:</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter <a href="https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2015/pflichtveranstaltungen_-_masterstudium/ndk15/">https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2015/pflichtveranstaltungen_-_masterstudium/ndk15/</a></li><li>• Visualisierung gibt es unter: <a href="http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/owl/nichtlineare_dynamik">http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/owl/nichtlineare_dynamik</a></li></ul>
<b>Scheinkriterien:</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen).</li><li>• Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).</li><li>• Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.</li></ul>
<b>Kontakte:</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, EW 735, 314-23500, <a href="mailto:schoell@physik.tu-berlin.de">schoell@physik.tu-berlin.de</a>, Sprechzeiten nach Vereinbarung.</li><li>• Dr. Anna Zakharova, ER 244, 314-28948, <a href="mailto:anna.zakharova@tu-berlin.de">anna.zakharova@tu-berlin.de</a>, Sprechzeiten Mo. 15:00-16:00</li><li>• M.Sc. Jan Totz, EW 627, 314-27683, <a href="mailto:jantotz@itp.tu-berlin.de">jantotz@itp.tu-berlin.de</a>, Sprechzeiten Mo. 16:00-17:00</li></ul>