Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Anna Zakharova, Jan Totz MSc, Anne-Kathleen Malchow BSc, Robert Salzwedel BSc, Manuel Katzer BSc, Christopher Wächtler BSc

4. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Bis Mi. 25.05.2016 18:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 9 (4 Punkte): *Matrizen und Determinanten*

Gegeben seien die Matrizen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(a) Berechnen Sie folgende Produkte: i) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ und ii) $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$.

(b) Berechnen Sie Det(A) und die Inverse A^{-1}.

Aufgabe 10 (8 Punkte): *Pauli-Matrizen*

Zur Beschreibung des Elektronenspins hat Wolfgang Pauli 1927 die 2×2 Matrizen

$$\underline{\underline{\sigma}}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}}_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

eingeführt (i ist die imaginäre Einheit).

(a) Zeigen Sie die, dass diese Matrizen selbstadjungiert (hermitesch) und unitär sind.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren aller $\underline{\underline{\sigma}}_i$.

(c) Überprüfen Sie die algebraische Relation

$$\underline{\underline{\sigma}}_i \underline{\underline{\sigma}}_j = \delta_{ij} \underline{\underline{1}} + \mathrm{i}\, \varepsilon_{ijk} \underline{\underline{\sigma}}_k, \quad i, j, k \in \{x, y, z\}$$

δ_{ij} ist das Kronecker-Delta und ε_{ijk} ist das Levi-Civita Symbol bzw. der Epsilon-Tensor.

(d) Zeigen Sie außerdem, dass daraus die Vertauschungsrelation

$$[\underline{\underline{\sigma}}_i, \underline{\underline{\sigma}}_j] = \underline{\underline{\sigma}}_i \underline{\underline{\sigma}}_j - \underline{\underline{\sigma}}_j \underline{\underline{\sigma}}_i = 2i\varepsilon_{ijk} \underline{\underline{\sigma}}_k, \quad i, j, k \in \{x, y, z\}$$

folgt (bis auf den Faktor 2 entspricht diese den Vertauschungsrelationen der Drehimpulsalgebra in der Quantenmechanik).

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 11 (8 Punkte): *Levi-Civita-Symbol und Kreuzprodukt*

Das Levi-Civita-Symbol sei gegeben durch

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1 & \text{falls } (ijk) \text{ ungerade Permutation von } (123) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie folgende Relationen

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

b) Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt für die Komponenten des Kreuzproduktes $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ die Beziehung $a_i = \varepsilon_{ijk} b_j c_k$. Zeigen Sie mittels dieser Definition und der obigen Relationen folgende Identitäten:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{3}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Hinweis: Beachten Sie die Einstein'sche Summenkonvention.

Vorlesung:	• Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.
Webseite:	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2016/pflichtveranstaltungen_-_bachelorstudium/mm16/
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur handschriftliche Originale akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist der selbstgeschriebener Code ausgedruckt mit abzugeben.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift - Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik
- S. Hess: Tensors for Physics. Undergraduate Lecture Notes in Physics (Springer, 2015)