

Prof. Dr. Harald Engel

Dr. Anna Zakharova, Jan Tötz MSc, Anne-Kathleen Malchow BSc, Robert Salzwedel BSc, Manuel Katzer BSc, Christopher Wächtler BSc

<b>2. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik</b>
---

**Abgabe: Bis Mi. 04.05.2016 18:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

**Aufgabe 4 (4 Punkte): Paramagnetismus: Langevin-Funktion**

Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad 0 < r < \infty$$

durch (Kurvenverlauf mit Nullstellen, Extrema, Asymptoten).  $\alpha$ ,  $\mu$  und  $L$  sind positive konstante reelle Parameter.

**Hintergrundinformationen:** Im kommenden Semester behandeln wir die Bewegung zweier gravitierender Massen,  $m$  und  $M$ , und reduzieren dieses Zwei-Körper-Problem auf die Bewegung eines fiktiven Teilchens in einem Zentralfeld. Für die potentielle Energie des fiktiven Teilchens werden wir in Abhängigkeit vom Abstand der beiden Massen den Ausdruck

$$U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

ableiten. Dabei enthält der Parameter  $\alpha$  die Gravitationskonstante  $\gamma$ ,  $\alpha = \gamma mM$ ,  $L$  ist der konstante Betrag des Drehimpulses der Relativbewegung und  $\mu = m \times M / (m + M)$  die sogenannte reduzierte Masse.

**Aufgabe 5 (9 Punkte): Kurvendiskussion, Potenzreihenentwicklung**

Skizzieren Sie die Funktion

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}$$

Besitzt diese Funktion Nullstellen, Extrema und Wendepunkte?

Beweisen und verwenden Sie die Relation  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ .Bestimmen Sie die Asymptoten für  $x \rightarrow \pm\infty$  und beweisen Sie die Potenzreihenentwicklung

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \dots$$

für kleine  $x$ . Tipp: Verwenden Sie Polynomdivision. Plotten Sie die Entwicklung mit steigender Anzahl von höherer Ordnungen mit Mathematica und diskutieren Sie die Abbildung. Achten Sie auf korrekte Beschriftung des Plots!

**Hintergrundinformationen:**  $\tanh(x)$  wird gerne als stetig differenzierbare Beschreibung von Stufen in physikalischen Problemen verwendet. Beispiele sind die Aktivierungsfunktion in neuronalen Netzwerken und die Schwellwertfunktion zur Modellierung von Ionenkanälen in Nervenzellen.

**Bitte Rückseite beachten! →**

## 2. Übung SS16

### Aufgabe 6 (7 Punkte): Komplexe Zahlen

a) Zeichnen Sie die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + 4i, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = -1 - i, \quad z_4 = 1 - 4i$$

in die komplexe Zahlenebene ein und geben Sie ihre trigonometrische Darstellung an.

b) Berechnen Sie die Produkte  $z_1 \times z_2$  und  $z_2 \times z_3$ , sowie die Quotienten  $z_1/z_2$  und  $z_1/z_4$ .

c) Berechnen Sie mithilfe der Euler'schen Identität die Potenzen  $z_2^3$  und  $z_4^6$  sowie alle Wurzeln von  $z^3 = z_2$  und  $z^5 = z_3$ .

d) Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen.  
Beweisen Sie die Relation

$$\sin 4x = 8 \cos^3 x \sin x - 4 \sin x \cos x.$$

#### Vorlesung:

- Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.

#### Webseite:

- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter [https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss.2016/pflichtveranstaltungen-\\_bachelorstudium/mm16/](https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss.2016/pflichtveranstaltungen-_bachelorstudium/mm16/)

Scheinkriterien: • Mindestens 50% der Übungspunkte.

- Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur handschriftliche Originale akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist der selbstgeschriebener Code ausgedruckt mit abzugeben.

#### Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift - Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik
- S. Hess: Tensors for Physics. Undergraduate Lecture Notes in Physics (Springer, 2015)