Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Do 10:00-11:00 in EW 708)

1. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 17.04.2013 in der Übung (10:15 EW 731)

Zum Übungsbetrieb:
Die Übungsaufgaben teilen sich auf in mündliche M und schriftliche S Aufgaben. Die Kriterien für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich daher in zwei Teile:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte. Die Abgabe erfolgt in Zweiergruppen.
- Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung diejenigen Aufgaben auf einer ausliegenden Liste an, die er oder sie bearbeitet hat. Wer eine Aufgabe angekreuzt hat, ist bereit diese Aufgabe an der Tafel vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen am Ende des Semesters in Summe 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt sein.

M **Aufgabe 1**: *Vektoren und Tensoren*

(a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \, , \\ (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a} &= \frac{1}{2}\nabla \mathbf{a}^2 - \mathbf{a} \times \mathrm{rot}\mathbf{a} \, . \end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie nun die Identitäten

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\Phi\mathbf{a}) &= \mathrm{grad}\Phi \cdot \mathbf{a} + \Phi \, \mathrm{div}\mathbf{a} \, , \\ \mathrm{rot}(\Phi\mathbf{a}) &= \mathrm{grad}\Phi \times \mathbf{a} + \Phi \, \mathrm{rot}\mathbf{a} \, , \\ \mathrm{div}(\mathrm{grad}\Phi \times \mathrm{grad}\Psi) &= 0 \, , \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ Vektoren und Φ und Ψ Skalare sind.

(c) Zeigen Sie: Für einen Tensor $\mathbf{T}$ zweiter Stufe und einen Vektor $\mathbf{a}$ gilt:

$$\mathrm{div}(\mathbf{T}^T\mathbf{a}) = \mathrm{div}\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{T}\,\mathrm{grad}) \cdot \mathbf{a} \, .$$

Hinweis: Die Divergenz eines Tensors zweiter Stufe ist ein Vektor mit den Komponenten $(\mathrm{div}\mathbf{T})_i = \sum_j \partial_j T_{ij}$.

(d) Gegeben sei ein Vektorfeld $\mathbf{u}$. Zerlegen Sie dessen Gradienten in einen symmetrischen Anteil $\mathbf{S}$ und in einen antisymmetrischen Anteil $\mathbf{A}$ und zeigen Sie, dass für jeden Vektor $\mathbf{v}$ gilt:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = (\frac{1}{2}\mathrm{rot}\mathbf{u}) \times \mathbf{v} \, .$$

Hinweis: Der Gradient eines Vektorfeldes ist eine Matrix mit den Komponenten $(\mathrm{grad}\mathbf{u})_{ij} = u_{i,j}$.

S **Aufgabe 2 (4 Punkte):** *Divergenz und Rotation in Kugelkoordinaten*

Die Punkte P des Raumes seien durch die krummlinigen Koordinaten (q_1, q_2, q_3) beschrieben. Zur Darstellung von Vektoren am Ort P bietet sich eine lokale Basis aus Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$ an, die Tangentialvektoren der Koordinatenlinien sind:

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial P}{\partial q_i} \quad \text{mit } h_i = \left|\frac{\partial P}{\partial q_i}\right| .$$

Zur Berechnung der $\mathbf{e}_i$ verwendet man z. B. kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) für den Punkt P, die nach den krummlinigen Koordinaten q_i parametrisiert sind.

(a) Der Gradient $\nabla\Phi$ einer skalaren Funktion $\Phi(P)$ ist über $\mathrm{d}\Phi = \nabla\Phi \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ definiert. Zeigen Sie, dass für die Komponenten des Nablaoperators $\nabla = (\nabla)_i \mathbf{e}_i$ bezüglich der Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ gilt:

$$(\nabla)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i} .$$

(b) Leiten Sie die folgende Darstellung von Divergenz und Rotation her.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{a} &= \operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 a_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 a_3)\right] , \\
(\nabla \times \mathbf{a})_i &= (\operatorname{rot}\mathbf{a})_i = \frac{1}{h_j h_k}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial q_j}(h_k a_{q_k}) .
\end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie Gradient, Divergenz und Rotation in Kugelkoordinaten (r,ϕ,θ).

S **Aufgabe 3 (6 Punkte):** *Tensoren*

(a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten für die Tensoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Aa} \cdot \mathbf{Aa} &= (\mathbf{A}^T\mathbf{Aa}) \cdot \mathbf{a} , \\
(\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T , \\
(\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} ,
\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{a}$ ein Vektor ist.

Im Zusammenhang mit der Tensorrechnung wird häufig das dyadische Produkt gebraucht. So kann ein Tensor $\mathbf{A}$ dargestellt werden als:

$$\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j .$$

(b) Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ des $\mathbb{R}^3$. Wie lauten die Eigenvektoren des dyadischen Produkts $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$? Was bedeutet damit anschaulich das dyadische Produkt? Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{M} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$.

(c) Betrachten Sie das dyadische Produkt $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$, wobei $\mathbf{n}$ ein Einheitsvektor ist. Wie lautet die Spur dieser Matrix? Was gilt hier für die Eigenwerte und Eigenvektoren? Wie ist die Wirkung von $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ auf einen Vektor $\mathbf{v}$? Berechnen Sie $(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})^k\,\mathbf{v}$, wobei $k \in N$ ist. Interpretieren Sie das Ergebnis.