Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

12. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 10.07.2013 in der Übung (10:15 EW 731)

M **Aufgabe 36**: *Einstein Diffusion*

Die Fokker-Planck Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\mathbf{r},t)$ eines Brownschen Teilchens in einer viskosen Flüssigkeit lautet

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\mathbf{r},t) - D\nabla^2 p(\mathbf{r},t) = 0\ .$$

Diese *Einsteinsche Diffusionsgleichung* mit Diffusionskonstante D besitzt in N Dimensionen die Greensche Funktion für ein unendliches Volumen (vgl. Aufgabe 15)

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, t-t_0) = \frac{1}{(4\pi D(t-t_0))^{N/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4D(t-t_0)}\right].$$

Bestimmen Sie für den eindimensionalen Fall $p(x,t)$ unter der Annahme, dass sich das Teilchen mit Sicherheit zur Zeit t_0 am Ort $x_0 > 0$ aufhielt, für $t > t_0$. Dabei sollen zwei Fälle unterschieden werden:

(a) Reflektierende Randbedingungen:
Der Transport des Teilchens ist durch eine reflektierende Wand auf den Halbraum $x > 0$ beschränkt. Dabei sollen die Randbedingungen $\partial_x p(x=0,t)$=0 und $p(x\to\infty,t)$=0 gelten.

(b) Absorbierende Randbedingungen:
Das Teilchen verschwindet aus dem Halbraum, sobald es die Wand bei $x = 0$ erreicht und kann nicht mehr zurückkehren. Damit ergeben sich die Randbedingungen $p(x=0,t)$=0 und $p(x\to\infty,t)$=0.

Hinweis: Verwenden Sie die Spiegel-Methode.

S **Aufgabe 37 (5 Punkte):** *Fluktuations-Dissipations-Theorem für die Diffusionsgleichung*
Betrachten Sie nun eine Diffusionsgleichung mit äußerem Feld $K(\mathbf{r},t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\mathbf{r},t) - D\nabla^2 p(\mathbf{r},t) = K(\mathbf{r},t)\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass für die Fouriertransformierte $\tilde{p}(\mathbf{k},\omega)$ folgende Identität erfüllt ist:

$$-i\omega\tilde{p}(\mathbf{k},\omega) + D\mathbf{k}^2\tilde{p}(\mathbf{k},\omega) = \tilde{K}(\mathbf{k},\omega)\ .$$

(b) Die Antwortfunktion $\chi(\mathbf{k},\omega) = \chi'(\mathbf{k},\omega) + i\chi''(\mathbf{k},\omega)$ sei definiert über

$$\tilde{p}(\mathbf{k},\omega) = \chi(\mathbf{k},\omega)\tilde{K}(\mathbf{k},\omega)\ .$$

Berechnen Sie $\chi'(\mathbf{k},\omega)$ und $\chi''(\mathbf{k},\omega)$.

(c) Verwenden Sie das Fluktuations-Dissipations-Theorem um die Fouriertransformierte $C(\mathbf{k},\omega)$ der Autokorrelationsfunktion von $p(\mathbf{x},t)$ zu berechnen.

(d) Zeichnen Sie jeweils $\frac{\chi'(\mathbf{k},\omega)}{\chi_{stat}(\mathbf{k})}$, $\frac{\chi''(\mathbf{k},\omega)}{\chi_{stat}(\mathbf{k})}$ und $\frac{C(\mathbf{k},\omega)}{\chi_{stat}(\mathbf{k})^2}$ als Funktion von $\frac{\omega}{D\mathbf{k}^2}$, wobei $\chi_{stat}(\mathbf{k}) = \chi(\mathbf{k},\omega=0)$.

S **Aufgabe 38 (5 Punkte):** *Matrixzerlegung*
Zerlegen Sie die Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 9 & 24 & 36 & 33 \\ 24 & 289 & 171 & 463 \\ 36 & 171 & 530 & 276 \\ 33 & 463 & 276 & 891 \end{pmatrix} \tag{1}$$

in die Dreiecksmatrizen $\mathbf{D}$ und $\mathbf{D}^T$, die die Form $\mathbf{M} = \mathbf{D}\mathbf{D}^T$ erfüllen. Verwenden sie hierzu folgende rekursive Bestimmungsgleichung für die Matrix.

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < j \\ \sqrt{M_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} D_{ik}^2} & \text{für } i = j \\ \frac{1}{D_{jj}} \left(M_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} D_{ik} D_{jk} \right) & \text{für } i > j \end{cases} \tag{2}$$

1. Berechnen Sie die untere Dreiecksmatrix $\mathbf{D}$, die dieser Form genügt.

2. Ersetzen Sie die Einträge der erhaltenen Matrix mit dem jeweiligen Buchstaben des Alphabets (A=1, B=2,...) und finden Sie den Namen des Mathematikers nach dem die Zerlegung benannt ist.