

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
 Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

6. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 22.05.2013 in der Übung (10:15 EW 731)

S Aufgabe 17 (5 Punkte): Oseen Tensor

Wir definieren die Fouriertransformation und Rücktransformation wie folgt:

$$\mathcal{F}\{f\} = \hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} = f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

mit den Relationen

$$\mathcal{F}\{\nabla f\} = i\mathbf{k}\hat{f}(\mathbf{k}), \quad \text{sowie} \quad \mathcal{F}\{\delta(\mathbf{r})\} = 1.$$

- (a) Gegeben sei die Poissongleichung und die biharmonische Gleichung sowie deren Fundamentallösungen:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \quad \text{mit Lösung} \quad \phi = \frac{1}{4\pi r}, \quad (4.9)$$

$$\nabla^4 \psi(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \quad \text{mit Lösung} \quad \psi = \frac{r}{8\pi}.$$

Zeigen Sie, dass:

$$\frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

$$\nabla \otimes \nabla \left(\frac{r}{8\pi} \right) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

- (b) Berechnen Sie die Divergenz der Stokesgleichung (4.1) mit $\rho \mathbf{b} = \mathbf{f}_0 \delta(\mathbf{r})$, $\mathbf{f}_0 = \text{const.}$. Fouriertransformieren Sie die resultierende Gleichung und bestimmen Sie $\hat{p}(\mathbf{k})$. Fouriertransformieren Sie anschließend die Stokesgleichung (4.1), eliminieren Sie $\hat{p}(\mathbf{k})$ und zeigen Sie, dass

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\eta k^2} \left(\mathbf{f}_0 - \mathbf{k} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_0}{k^2} \right).$$

- (c) Setzen Sie $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k})$ in die Formel der Rücktransformation ein und vergleichen Sie die auftretenden Terme mit den Ausdrücken aus (a), die Sie skalar mit \mathbf{f}_0 multiplizieren. Zeigen Sie, dass für den Oseen-Tensor $\mathbf{O}(\mathbf{r})$ gilt:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{O}(\mathbf{r}) \mathbf{f}_0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{O}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\eta r} \cdot \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right). \quad (4.15)$$

M Aufgabe 18: Stokes Reibungsgesetz

Wir suchen das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, das um eine Kugel mit Radius R entsteht, wenn sie bei kleiner Reynoldszahl mit der Geschwindigkeit \mathbf{u}_p von einer Flüssigkeit angeströmt wird. Das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sei axialsymmetrisch mit

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + v_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta$$

wobei die Achse mit $\theta = 0$ die Symmetrieachse darstellt. Die Randbedingungen lauten

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{u}_p, \quad r \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0, \quad r = R.$$

6. Übung SP WS12

- (a) Die Strömungsfunktion $\Psi(r, \theta)$ für axialsymmetrische Kugelkoordinaten ist definiert (analog zu Aufgabe 8, Blatt 3) über $\mathbf{v} = \nabla \times \left(\frac{\Psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right)$. Zeigen Sie folgenden Zusammenhang zwischen Ψ und \mathbf{v} :

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \text{sowie} \quad v_\theta = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

- (b) Berechnen Sie die Vortizität $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ und $\nabla^2 \omega$ und finden Sie mit Hilfe der Stokes Gleichung eine Differentialgleichung für Ψ .
- (c) Formulieren Sie die Randbedingungen um in Bedingungen für Ψ und lösen Sie die Differentialgleichung mit dem Ansatz $\Psi = f(r) \sin^2 \theta$. Zeigen Sie, dass:

$$v_r = |\mathbf{u}_p| \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right), \quad \text{sowie} \quad v_\theta = -|\mathbf{u}_p| \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right).$$

S Aufgabe 19 (5 Punkte): Stokes Reibungsgesetz - Kraft

- (a) Berechnen Sie den Druck $p(\mathbf{r})$ aus den Stokes Gleichungen und dem Geschwindigkeitsfeld aus Aufgabe 18. Verwenden Sie die Randbedingung $p(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ für $\mathbf{r} \rightarrow \infty$.
- (b) Berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{A} aus dem Geschwindigkeitsfeld aus Aufgabe 18. (Achtung: Kugelkoordinaten!)
- (c) Berechnen Sie den Kraftvektor

$$\mathbf{f} = \mathbf{Tn} = -p\mathbf{n} + 2\eta\mathbf{An}, \quad (3.19), (3.41), (3.56)$$

auf der Oberfläche der Kugel $r = R$ und zeigen Sie, dass $|\mathbf{f}| = 6\pi\eta R|\mathbf{u}_p|$.