Dr. Ermin Malic
Dr. Marten Richter
Dipl. Phys. Julia Kabuß

9. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I+II

Abgabe: Mi. 19.06.2013 vor Beginn der Vorlesung im EW 203

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 13 (15 Punkte): *BCS-Theorie des Supraleiters*

In der VL wurde der BSC Hamiltonian von Elektronen, die mittels Phononenaustausch attraktiv wechselwirken, hergeleitet:

$$\hat{H}_{BCS} = 2\sum_k E(k)\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - V\sum_{kk'} \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_{-k'}^\dagger \hat{a}_{-k}\hat{a}_k$$

Dabei gibt das Vorzeichen vor der Wellenzahl auch gleichzeitig den Spin ($\pm$) an. Ausgehend von einer gefüllten Fermikugel (neuer Vakuumzustand $|\phi_0\rangle$) wird ein neuer Grundzustand $|g\rangle$, der Cooperpaare enthält, konstruiert:

$$|g\rangle = \prod_k (u_k + v_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger)|\phi_0\rangle.$$

Aus Normierung folgt $u_k^2 + v_k^2 = 1$. Durch die sogenannte Bogoljubov-Transformation

$$\hat{d}_k = u_k\hat{a}_k - v_k\hat{a}_{-k}^\dagger, \quad \hat{d}_{-k} = u_k\hat{a}_{-k} + v_k\hat{a}_k^\dagger$$
$$\hat{d}_k^\dagger = u_k\hat{a}_k^\dagger - v_k\hat{a}_{-k}, \quad \hat{d}_{-k}^\dagger = u_k\hat{a}_{-k}^\dagger + v_k\hat{a}_k$$

erhält man neue Teilchen, für die gilt: $\hat{d}_k|g\rangle = 0$ und $\hat{d}_{-k}|g\rangle = 0$

1. Zeigen Sie, dass die neuen Operatoren den Antikommutatorregeln von Fermioperatoren unterliegen: $\left[\hat{d}_k, d_{k'}^\dagger\right]_+ = \left[\hat{d}_{-k}, d_{-k'}^\dagger\right]_+ = \delta_{k,k'}$ und z.B. $\left[\hat{d}_k, \hat{d}_{-k'}^\dagger\right]_+ = 0$
2. Stellen Sie die Umkehrtransformation auf ($\hat{a}_{-k} = \dots$)
3. Transformieren Sie den Hamiltonian in die Form $\hat{H} = E_0 + E_1\hat{H}_1 + E_2\hat{H}_2 + E_3\hat{H}_3$, wobei E_0 keine Operatoren enthalten sollen, $\hat{H}_1$ nur $\hat{d}^\dagger\hat{d}$ Operatorpaare, H_2 die $\hat{d}^\dagger\hat{d}^\dagger$, $\hat{d}\ \hat{d}$ Paare und $\hat{H}_3$ die verbleibenden Viererterme, die vernachlässigt werden können.
4. Zeigen Sie: Variation von E_0 nach v_k liefert:
$$2\varepsilon(k)\frac{u_k v_k}{u_k^2 - v_k^2} = V\sum_{k'} u_{k'}v_{k'} \quad (=: \Delta)$$
TIPP: v_k ist verknüpft mit mit u_k, daher ist $\delta E_0 = \left(\frac{\delta E_0}{\delta v_k} - \frac{\delta E_0}{\delta u_k}\frac{v_k}{u_k}\right)\delta v_k = 0.$
5. Folgern Sie: $E_2 = 0$.
6. Zeigen Sie, dass $E_1 = \sum_k \sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}$ gilt. Skizzieren Sie E_1 als Funktion von k und interpretieren Sie.