Prof. Dr. Tobias Brandes
Arash Azhand
Wassilij Kopylov
Christian Fräßdorf

# 9. Übungsblatt – Theoretischen Physik IV

**Abgabe: Fr. 14. 06. 2013 bis 17:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!*

**Aufgabe 23 (3 Punkte):** *Blochkugel und gemischte Zustände*
Wir betrachten hier ein Spin-$\frac{1}{2}$-System.

(1) Zeigen Sie, dass eine beliebige Dichtematrix für einen gemischten Spin-$\frac{1}{2}$-Zustand geschrieben werden kann als
$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right),$$
wobei $I$ die Einheitsmatrix und $\vec{\sigma}$ der Vektor der Pauli-Spin-Matrizen sind. Der Vektor $\vec{r}$ ist ein reeller dreidimensionaler Vektor, so dass $\|\vec{r}\| \leq 1$. Dieses Vektor ist der Blochvektor für den Zusatnd $\rho$.

(2) Wie sieht die Blochvektor-Darstellung für den Zustand $\rho = \frac{1}{2}I$ aus?

(3) Zeigen Sie, dass ein Zusatnd $\rho$ rein ist, dann und nur dann, wenn $\|\vec{r}\| = 1$.

**Aufgabe 24 (12 Punkte):** *Entartetes Fermigas*
Betrachten Sie ein Fermigas bei $T = 0$ mit der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E = mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}$.

1. Zeigen Sie, dass man dann für den Logarithmus der Zustandssumme $\ln Z = \sum_k \ln(1 + e^{\mu\beta}e^{-\beta E_k})$ für ein Teilchen folgenden Ausdruck erhält:
$$\ln Z = 2\cdot\frac{4\pi V}{h^3}\frac{\beta}{3}\int_0^{p_f} p^3 dp \frac{dE}{dp}, \tag{1}$$
wobei $p_f$ der zu der Fermi-Energie $E_F$ zugehörige Impuls ist.
Tipp: Drücken Sie dazu $\sum_k$ mit den Integralen über Ort und Impuls aus und benutzen Sie die Kugelkoordinaten.

2. Benutzen Sie nun die relativitische Energie-Impuls-Beziehung, um mithilfe der Gleichung (1) den Druck des Fermigases $P$ zu erhalten :
$$P = \frac{8\pi}{3h^3}\int_0^{p_f} mc^2 \cdot \frac{\left(\frac{p}{mc}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}} p^2 dp. \tag{2}$$
Hinweis: Verwenden Sie $\ln Z = PV/(kT)$.

3. Benutzen Sie nun die Substitution $p = mc\sinh(x)$ und zeigen Sie damit, dass sich dann die Gleichung (2) folgendermaßen schreiben lässt:
$$P = \frac{16\pi m^4 c^5}{6h^3}A(x_f) \text{ wobei } A(x_f) \equiv \int_0^{x_f} \sinh^4(x)dx. \tag{3}$$
Hierbei ist $p_f = mc\sinh(x_f)$.

4. Zeigen Sie, dass der Druck $P$ im nichtrelativistischen Fall (wie groß ist dann $x_f$) durch $P_N = \frac{2}{3}\left(\frac{4\pi}{5h^3m}p_f^5\right)$ und im ultra-relativistischen Fall durch $P_R = \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi c}{h^3}p_f^4\right)$ gegeben ist. Schätzen Sie dazu $A(x_f)$ geeignet ab und nehmen Sie hierbei nur die niedrigste Ordnung mit.

5. Zeigen Sie, dass $p_f$ gegeben ist durch
$$p_f = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{Nh^3}{2V}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{4}$$
Benutzen Sie dazu den Zusammenhang zwischen der mittelren Teilchenzahl N und der Fermiverteilung.

6. Der hydrostatische Druck im Zentrum eines sphärisch symmetrischen (Neutronen-) Sterns ist durch $P_H = \frac{2}{3}\pi G\rho_s^2 R_S^2$ gegeben, wobei $\rho_s$ die mittlere Dichte ist. Zeigen Sie, dass sich dann im Nicht-relativistischen Limit folgender Radius des Sterns ergibt:
$R_S = \frac{(18\pi)^{2/3}}{10} \cdot \frac{\hbar^2}{GM_S^{1/3}} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{8/3}$.
Hierbei ist $M_S$ die Masse des Neutronensterns und $m$ die Neutronenmasse. Gehen Sie auch davon aus, dass der gesamte Stern nur aus Neutronen besteht.

**Aufgabe 25 (5 Punkte):** *Thermodynamik von Fraktalen*
Wir betrachten folgendes Energiespektrum als Approximation eines fraktalen Energiespektrums (Cantor-Menge):
$$\{E\}_n = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \cdots + \frac{c_n}{3^n},$$
wobei $c_k$ die Werte $0$ oder $2$ annehmen sollen. Ein Mikrozustand ist dann durch Angabe von $c_1$, $c_2$, $\cdots$, $c_n$ definiert.

1. Berechnen Sie für dieses System einen Ausdruck für die kanonische Zustandssumme und die spezifische Wärme $C_V$ bei der Temperatur $T$.

2. Berechnen Sie damit $C_V(T)$ numerisch für $n = 1$, $n = 5$, $n = 10$ und zeigen Sie so, dass $C_V(T \to 0)$ für große $n$ um die Hausdorff-Dimension der Cantor-Menge oszilliert.

Vorlesung: Mi. um 12 Uhr – 14 Uhr in EW 203,
Fr. um 8 Uhr – 10 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens $50\%$ der schriftlichen Übungspunkte.
- Bestandene Klausur
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien

Sprechzeiten:

| Name | Tag | Zeit | Raum | Tel. |
|---|---|---|---|---|
| Prof. Dr. Tobias Brandes | Mo | 13:00 – 14:00 Uhr | EW 744 | 23034 |
| Arash Azhand | Do | 15:00 – 16:00 Uhr | EW 627 | 27681 |
| Wassilij Kopylov | Mi | 15:00–16:00 Uhr | EW 705 | 22741 |
| Christian Fräßdorf | Di | 12:00–13:00 Uhr | EW 060 | |