Prof. Dr. Tobias Brandes
Arash Azhand
Wassilij Kopylov
Christian Fräßdorf

10. Übungsblatt – Theoretischen Physik IV

Abgabe: Fr. 21. 06. 2013 bis 17:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!

Aufgabe 26 (4 Punkte): *Reduzierte Dichtematrix*
Betrachten Sie einen bipartiten Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{B}$. Zeigen Sie, dass der reduzierte Dichteoperator $\rho_A = Tr_B \left|\Psi\right\rangle \left\langle\Psi\right|$ mit $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ ausreicht, um Erwartungswerte $\langle A\rangle$ mittels $\langle A\rangle = Tr_A(\rho_A A)$ zu berechnen, sofern der Operator A nur auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_\mathcal{A}$ operiert. Entwickeln Sie dazu den Zustand $|\Psi\rangle$ nach einem VONS von $\mathcal{H}_\mathcal{A}$ und $\mathcal{H}_\mathcal{B}$, berechnen Sie damit $\langle A\rangle$ und identifizieren Sie ρ_A.

Aufgabe 27 (8 Punkte): *Spin 1/2-System und die reduzierte Dichtematrix*
Ein Spin $1/2$ (System A) sei an ein Wärmebad (System B) mit N Zuständen gekoppelt. Das Gesamtsystem $(A{+}B)$ befinde sich im normierten Zustand

$$|\Psi\rangle \equiv |\uparrow\rangle \otimes (\alpha_1|1\rangle + \ldots + \alpha_N|N\rangle) + |\downarrow\rangle \otimes (\beta_1|1\rangle + \ldots + \beta_N|N\rangle).$$

(a) Wie lautet die Dichtematrix ρ vom Gesamtsystem?

(b) Drücken Sie die reduzierte Dichtematrix ρ_A für das System A mittels der komplexen Koeffizientenvektoren $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ aus.

(c) Berechnen Sie den Erwarungswert $\langle\sigma_z\rangle$, in dem Sie

   (i) die volle Dichtematrix ρ

   (ii) nur die reduzierte Dichtematrix ρ_A

   benutzen. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse. Hinweise: Nützlich ist es hier die Matrix/Vektor-Darstellung zu verwenden, dann ist $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $|\uparrow\rangle = (1,0)^T$ und $|\downarrow\rangle = (0,1)^T$.

(d) Berechnen Sie die Quadrate der Koeffizienten, λ_n^2, in der Schmidt-Zerlegung des Zustands, $|\Psi\rangle = \sum_n \lambda_n |c_n^{(A)}\rangle \otimes |c_n^{(B)}\rangle$, und überprüfen Sie explizit, dass ρ_A eine Dichtematrix ist.

(e) Diskutieren Sie für reelle $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ mit $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ die Abhängigkeit der von-Neumann-Entropie für ρ_A vom Winkel zwischen $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$. Wann ist $|\Psi\rangle$ verschränkt?

Bitte die Rückseite beachten.

Aufgabe 28 (8 Punkte): *Bloch-Gleichungen*
Sei $H = -\omega_0\sigma_z - 2\omega_x \cos(\omega_L t)\sigma_x$ der Hamiltonoperator vom Spin-1/2-System in einem oszillierenden Magnetfeld.

1. Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung des Dichteoperators $\rho(t)$. Stellen Sie dazu den Dichteoperator $\rho(t)$ mithilfe der Basis aus 2×2- Matrizen dar, d.h. $\rho(t) = a(t)\sigma_x + b(t)\sigma_y + c(t)\sigma_z + d(t)\mathbf{1}$ und leiten Sie mit mithilfe der Liouville-von-Neumann-Gleichung eine Bewegungsgleichung für die Koeffizienten $\vec{v} \equiv (a(t), b(t), c(t), d(t))$ ab. Bringen Sie Ihr Ergebnis in Form $d_t\vec{v} = M\vec{v}$ mit einer zu bestimmenden Matrix M. Sie erhalten $M = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 & 0 \\ -\omega_0 & 0 & 2\omega_x\cos(\omega_L t) & 0 \\ 0 & -2\omega_x\cos(\omega_L t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Begründen Sie, warum $d(t) = 1/2$ sein muss. Benutzen Sie dafür ausschließlich die Eigenschaften eines Dichteoperators. Wie hängt der gemachte Ansatz für den Dichteoperator mit der Bloch-Sphäre zusammen?

3. Lösen Sie das sich ergebende Gleichungssystem numerisch für $\omega_0 = \omega_x = \omega_L = 1$. Nehmen Sie für die Anfangsbedingung an, dass sich das System im Zustand $|\Psi\rangle \equiv= (1,0)^T$ befindet. Plotten Sie als Nachweis die Koeffizenten $a(t), b(t), c(t), d(t)$ für $t \in [0, 500]$. Und legen Sie außerdem den Quellcode bei.

4. Sei nun das System am Anfang im Zustand $|\Psi(t = 0)\rangle = (1, 0)^T$. Berechnen Sie mithilfe der Dichtematrix die zeitliche Entwicklung der Besetzung $\langle\sigma_z(t)\rangle$. Geben Sie dafür einen Ausdruck in Abhängigkeit von $a(t), b(t), c(t), d(t)$ an und plotten Sie dann mithilfe der numerischen Ergebnisse die zeitliche Entwicklung von $\langle\sigma_z(t)\rangle$. Kommentieren Sie kurz das Ergebnis.

Vorlesung:
Mi. um 12 Uhr – 14 Uhr in EW 203,
Fr. um 8 Uhr – 10 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Bestandene Klausur
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Dr. Tobias Brandes	Mo	13:00 – 14:00 Uhr	EW 744	23034
Arash Azhand	Do	15:00 – 16:00 Uhr	EW 627	27681
Wassilij Kopylov	Mi	15:00–16:00 Uhr	EW 705	22741
Christian Fräßdorf	Di	12:00–13:00 Uhr	EW 060	