

2. Komplexe Zahlen

2.1 Definition und geometrische Darstellung

Komplexe Zahl

$$\underline{z := x + iy}$$

mit Realteil $x =: \operatorname{Re} z$, Imaginärteil $y =: \operatorname{Im} z$ und imaginärer Einheit i . Dabei sind i und $-i$ die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + 1 = 0, \text{ d.h. } \underline{i^2 = i \cdot i = -1}.$$

$z := x + iy$ wird algebraische Darstellung der komplexen Zahl z in der Gauß'schen Zahlenebene genannt.

Trigonometrische Darstellung der komplexen Zahl z lautet

$$\underline{z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi}.$$

Dabei bedeuten $r = \sqrt{x^2 + y^2} =: |z| = \sqrt{z z^*}$, $0 \leq r < \infty$ der Betrag (Modul) und

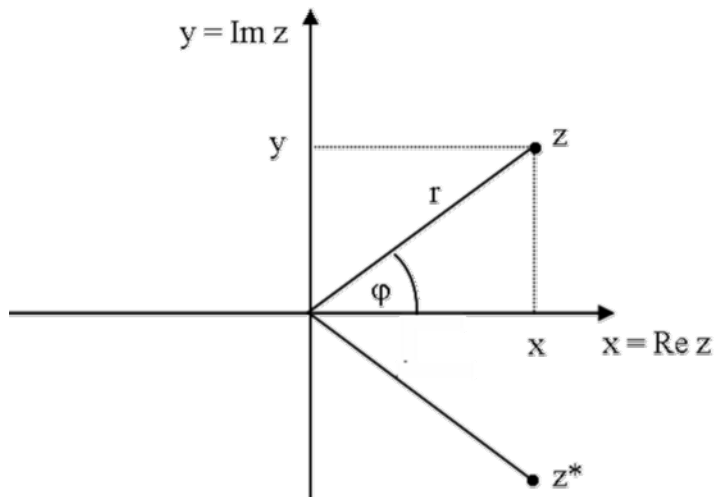
$\arg z = \varphi + 2k\pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ das Argument der komplexen Zahl z . Der

Winkel $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ wird Hauptwert (Phase) von z genannt.

Die komplexe Zahl z^*

$$z^* := x - iy$$

heißt komplex konjugiert zu z .



Algebraische und trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl z in der Gauss'schen Zahlenebene unter Verwendung von ebenen kartesischen (x, y) bzw. ebenen Polarkoordinaten (r, φ)

2.2 Die Euler'sche Formel

Aus der Taylor-Reihe der Exponentialfunktion folgt unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} \dots = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}}_{\text{Taylor-Reihe von } \cos x} + i \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right)}_{\text{Taylor-Reihe von } \sin x} = \cos x + i \sin x$$

die Euler'sche Formel

$$\underline{e^{ix} = \cos x + i \sin x .}$$

Die Euler'sche Formel beleuchtet den Zusammenhang zwischen Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen

$$\left. \begin{array}{l} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2}i(e^{-ix} - e^{ix}) \end{array} ,$$

in diesem Sinne entsprechen $\cos x$ und $\sin x$ dem "geraden bzw. ungeraden Anteil" von e^{ix} . Das gleiche gilt für die Potenzreihen; Analoges gilt für die Potenzreihen; so kann man sich die für $\cos x$ und $\sin x$ gut merken. Der Konvergenzbereich dieser Reihen ist die gesamte reelle Achse.

Ein weiterer interessanter Zusammenhang besteht zwischen den hyperbolischen und den trigonometrischen Funktionen entsprechend

$$\cosh(ix) = \cos x, \quad \sinh(ix) = i \sin x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Die Potenzreihenentwicklung von $\cosh x$ und $\sinh x$ enthält die geraden bzw. die ungeraden Terme der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion gemäß

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

• Die Euler'sche Formel ist oft hilfreich bei der Ableitung von Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen, z.B. der Additionstheoreme:

$$\blacksquare \quad \cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{i3x}) = \operatorname{Re}[(\cos x + i \sin x)^3] = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\blacksquare \quad \begin{aligned} \sin(4x) &= \operatorname{Im}(e^{i4x}) = \operatorname{Im}[(\cos x + i \sin x)^4] = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x = \\ &= 8 \cos^3 x \sin x - 4 \sin x \cos x \end{aligned}$$

usw.

2.3 Rechenregeln für komplexe Zahlen

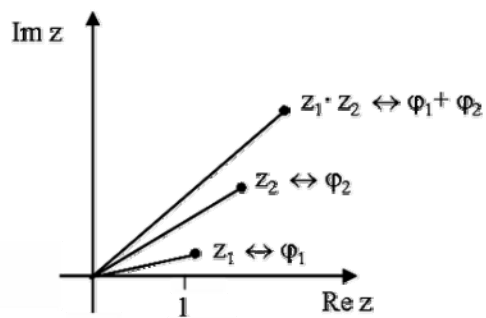
Bei Bedarf Addition/Subtraktion, Multiplikation/Division, Potenzen/Wurzeln komplexer Zahlen wiederholen und üben (vgl. z.B. Bronstein, Kap. 1.5.3.)

• Multiplikation komplexer Zahlen

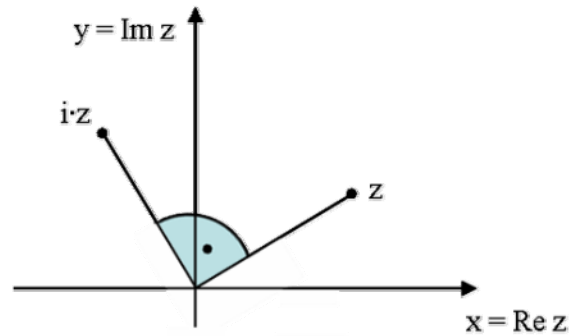
- in algebraischer Darstellung: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i b_1) \cdot (a_2 + i b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$

- in trigonometrischer Darstellung:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = \underbrace{r_1 r_2}_{\substack{\text{strecke/stauche} \\ \text{um } r_1 \text{ bzw. } r_2}} [\underbrace{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}_{\substack{\text{drehe } z_2 \text{ um } \varphi_1 \text{ oder } z_1 \text{ um } \varphi_2 \\ \text{gegen Uhrzeiger}}}]$$



Produkt $z_1 z_2$: drehe Vektor z_2 gegen Uhrzeigersinn um φ_1 und strecke/stauche um r_1



Multiplikation mit imaginärer Einheit i äquivalent zu Drehung um $\pi/2$

- Analog Division komplexer Zahlen (selbstständig)

- Potenzieren komplexer Zahlen

Unter Verwendung des Euler'schen Satzes finden wir die Formel von Moivre

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$$

- Wurzel aus einer komplexen Zahl (Radizieren)

Mit $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$ und $\arg z = \varphi + 2k\pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ hat

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} \quad \rightarrow \quad z_n = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

n verschiedenen Werte. In der Gauss'schen Zahlenebene sind die Punkte z_n die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung.

Beispiele:

- n -te Wurzel der Gleichung $z^n = 1$ (n -te Einheitswurzel)

$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = 1$ ergibt wegen $e^{2\pi ki} = 1$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$$\varphi = \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

- $z^2 = 1 \rightarrow \varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \pi$
- $z^3 = 1 \rightarrow \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{1}{3}2\pi \cdot 1 = \frac{2\pi}{3}, \varphi_3 = \frac{1}{3}2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi}{3}$ (gleichseitiges Dreieck)

- 6 Werte für $\sqrt[6]{z}$ bilden Eckpunkt eines regelmäßigen Sechsecks

