Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Julia Kabuß, Dipl. Phys. Maria Zeitz, Robert Kohlhaas BSc, Hagen-Henrik Kowalski, Alexander Ziepke

6. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Bis Do. 05.06.2014 8h25 vor Beginn der Vorlesung im EW 201 oder im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 13 (10 Punkte): *Geschwindigkeitsfelder*

Betrachten Sie die vier Geschwindigkeitsfelder in zwei Dimensionen, die durch den Vektor

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

beschrieben sind.

(i) $u = c, \qquad v = 0$

(ii) $u = cy, \qquad v = 0$

(iii) $u = \varepsilon \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v = \varepsilon \frac{y}{x^2+y^2} \quad (r > 0)$

(iv) $u = M \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad v = -M \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad (r > 0)$

Hierbei sei $r = \sqrt{x^2+y^2}$ der Betrag und c, ε, M Konstanten.

(a) Skizzieren Sie das jeweilige Vektorfeld sowie einige Stromlinien.

(b) Berechnen Sie die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$ und die Rotation $\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (0, 0, \partial_x v(x,y) - \partial_y u(x,y))^T$ des Vektorfeldes.

Aufgabe 14 (Mündlich): *Kurzfrage*
Es seien zwei Vektorfelder $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ und die Divergenz

$$\nabla \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \mathbf{g}(\mathbf{x}))$$

gegeben. Mit den Regeln für das Spatprodukt erhielte man formal die Beziehung

$$\nabla \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot (\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x})) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot (\nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{x})).$$

Erläutern Sie kurz, warum diese Relation **falsch** ist und leiten Sie die richtige Formel her.

Bitte Rückseite beachten!⟶

6. Übung SS14

Aufgabe 15 (4 Punkte): *Ableitungen von Feldern*
Das abgeschirmte elektrische Potential einer Punktladung in einem Plasma ist gegeben durch $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}$, wobei r der Betrag des Abstandsvektors $\mathbf{r}$ ist ($\mathbf{r} \neq 0$).

(i) Bestimmen Sie jeweils die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i}$, mit $x_i \in \{x, y, z\}$.

(ii) Bestimmen Sie außerdem das skalare Feld definiert als $\psi(\mathbf{r}) := \sum_i \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial^2 x_i} \equiv \Delta\varphi(\mathbf{r})$.

(iii) **Mündlich** Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen des Dipolfeldes $\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$, wobei $\mathbf{p}$ =const.

(iv) Berechnen Sie zunächst allgemein das Gradientenfeld eines skalaren Potentials der Form $\varphi(\mathbf{r}) = f(r)$ und daraus dann das Gradientenfeld von $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}$.

Aufgabe 16 (4 Punkte): *Taylorentwicklung von Feldern*
Die Taylorentwicklung eines skalaren Feldes $\varphi(\mathbf{r})$ ist gegeben durch:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!}\Big((\nabla \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))^n\Big)\varphi(\mathbf{r}_0)$$

Beachten Sie, dass in dieser Schreibweise der Nabla-Operator nicht auf das $\mathbf{r}$ im $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ wirkt. Berechnen Sie hiermit die Taylorentwicklung 2. Ordnung des Potentials $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{r}|}$ für $a \gg r$.

Vorlesung:	• Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.
Webseite:	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2014/pflichtveranstaltungen_-_bachelorstudium/mm130/
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Mindestens 50% Teilnahme an mündlichen Aufgaben. • Mindestens 1x Vorrechnen. • Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur handschriftliche Originale akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift - Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik