Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Mathias Hayn, Judith Lehnert, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Zeynep Cetinkaya

1. Übungsblatt – Quantenmechanik I

Abgabe: Mo. 28. April 2014 bis 10:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (1+2+3=6 Punkte): *Gauß-Integrale*

(a) Benutzen Sie das im Tutorium hergeleitete Ergebnis für das Gauß-Integral, $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ und berechnen Sie die beiden Integrale:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

(b) Berechnen Sie mithilfe der vorherigen Ergebnisse das folgende Integral:

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-ax^2+2bx}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{b^2/a}. \tag{2}$$

(c) Zeigen Sie, dass für geradzahlige $n \geq 0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^\infty x^n\,\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{2}\sqrt{\pi}a^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{3}$$

Benutzen Sie Symmetrieüberlegungen, um zu zeigen, dass dieses Integral für ungeradzahlige $n > 0$ verschwindet.
Hinweis: Vergessen Sie partielle Integration und bedenken Sie, dass die Gleichung $x^2 \exp[ax^2] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\exp[ax^2]$ gilt.

Anmerkungen: Diese Ergebnisse können Sie für alle folgenden Aufgaben dieses Zettels und dieses Semesters nach Belieben verwenden. Alle Ergebnisse gelten sowohl für rein imaginäre als auch für komplexe a, b. Wobei im letzten Fall der Realteil von a positiv sein muss.

Aufgabe 2 (2+3=5 Punkte): *Fourier-Transformation & freie Schrödinger-Gleichung*

Die Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen in einer Raumdimension lautet:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t). \tag{4}$$

Dies ist die Schrödinger-Gleichung im Ortsraum mit der Wellenfunktion $\psi(x,t)$ im Ortsraum. Die (nur im Ort) Fourier-Transformierte $\tilde{\psi}(k,t)$ der Wellenfunktion $\psi(x,t)$ ist definiert über:

$$\tilde{\psi}(k,t) \equiv \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \psi(x,t)\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Diese wird als Wellenfunktion im Impulsraum bezeichnet. Entsprechend gilt für die Rücktransformation:

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \tilde{\psi}(k,t)\,\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}k. \tag{6}$$

(a) Stellen Sie die Schrödinger-Gleichung im Impulsraum auf. Diese ist eine Differentialgleichung nur noch in der Zeit für $\tilde{\psi}(k,t)$.

(b) Betrachten Sie nun einen beliebigen Anfangswert $\tilde{\psi}(k,t=0)$ und lösen Sie die Differentialgleichung aus (a). Zeigen Sie damit, dass die allgemeine Lösung im Ortsraum gegeben ist durch:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x,t;x',t'=0)\,\psi(x',t'=0)\,\mathrm{d}x', \text{ mit} \tag{7}$$

$$U(x,t;x',t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t-t')}}\,\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}m\frac{(x-x')^2}{t-t'}\right], \quad t>t'. \tag{8}$$

Aufgabe 3 (3+1+3+3+2=12 Punkte): *Gauß'sches Wellenpaket*
In dieser Aufgabe soll die freie zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets untersucht werden. Dazu betrachten wir ein Gauß'sches Wellenpaket.

(a) Benutzen Sie die allgemeine Lösung aus Aufgabe (2b), um $\psi(x,t)$ für den speziellen Anfangswert $\psi(x,t=0) = N^{-1/2}\exp[-\frac{x^2}{2\Delta^2}+ik_0x]$ zu berechnen. Zeigen Sie, dass sich die Wellenfunktion in der Form

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{N}\frac{\Delta}{\Delta(t)}}\,\exp\left[-\frac{(x-\frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{2\,\Delta(t)^2}\right]\exp\Big[ik_0\Big(x-\frac{1}{2}\frac{\hbar k_0}{m}t\Big)\Big] \tag{9}$$

darstellen lässt. Dabei ist $\Delta(t) = \Delta\sqrt{1+i\hbar t/(m\Delta^2)}$.

(b) Bestimmen Sie N, so dass die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ auf Eins normiert ist.
Hinweis: Die Norm eines Zustands bleibt unter der Dynamik der Schrödinger-Gleichung erhalten.

(c) Berechnen Sie den Mittelwert $\langle x\rangle$ und die Varianz $\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle$ des Ortes in diesem Zustand. Hier ist $\langle A\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)\,A\,\psi(x,t)\,\mathrm{d}x$ der Erwartungswert der Größe A im normierten Zustand ψ.
Hinweis: Beachten Sie, dass $\Delta(t)$ komplex ist.

(d) Zeichnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi(x,t)|^2$ für verschiedene k_0 und Zeiten t. Diskutieren Sie in diesem Zusammenhang Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe (c). Was ist die physikalische Bedeutung von k_0?

(e) Nun beschreibe dieses Gauß'sche Wellenpaket ein Teilchen der Masse m. Die Größe des Teilchens sei durch $\sqrt{\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle}$ bestimmt. Nach welcher Zeit ist die Größe (i) eines Elektrons, (ii) eines Fußballs um 10% angewachsen, wenn man sie durch die freie Schrödinger-Gleichung beschreiben würde? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.