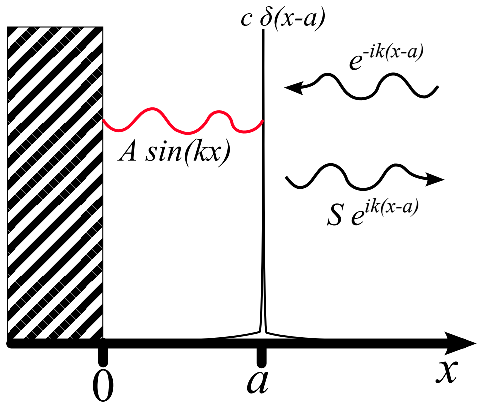
Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Mathias Hayn, Judith Lehnert, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Zeynep Cetinkaya

# 4. Übungsblatt – Quantenmechanik I

**Abgabe: Mo. 19. Mai 2014 bis 10:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden* **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

**Aufgabe 8 (2+2+2+2=8 Punkte):** *Streu- und Resonanztheorie*




In dieser Aufgabe untersuchen wir die eindimensionale Streuung einer von rechts einfallenden ebenen Welle an einem Delta-Potential im Halbraum. Der Hamilton-Operator dieses System lautet:

$$H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x), \tag{1}$$

mit

$$V(x) = \begin{cases} \infty & : x \leq 0, \\ c\,\delta(x-a) & : x > 0 \end{cases}, \quad a, c > 0. \tag{2}$$

Rechnen Sie im Folgenden mit $\hbar^2/2m = 1$ (Welche Einheit hat dann die Konstante $c$?).

(a) Auf Grund der Randbedingungen bietet sich der (nicht normierte) Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} A\,\sin(kx) & : x \leq a, \\ \mathrm{e}^{-ik(x-a)} + S\,\mathrm{e}^{ik(x-a)} & : x \geq a \end{cases} \tag{3}$$

für die Wellenfunktion an. Begründen Sie diesen Ansatz. Wie hängt $k$ mit der Energie $E$ zusammen?

(b) Benutzen Sie, dass die Wellenfunktion stetig, ihre Ableitung jedoch unstetig ist, um die Koeffizienten $A = A(ka)$ und $S = S(ka)$ als Funktion von $ka$ zu bestimmen. Gehen Sie dabei analog wie beim einfachen Delta-Potential vor, welches im Tutorium besprochen wird.
**Bemerkung:** $A$ lässt sich schreiben als: $A(ka) = -\frac{2ika}{ka\exp(-ika)+ca\sin(ka)}$.

(c) Zeichnen Sie die Amplitude $|A(ka)|^2$ für verschiedene Werte von $ca$. Diskutieren Sie das Verhalten.

(d) Diskutieren Sie die Grenzfälle $ca \to 0$ und $ca \to \infty$. Untersuchen Sie dazu insbesondere das Verhalten der Wellenfunktion.

**Aufgabe 9 (4+4+1+3=12 Punkte):** *Harmonischer Oszillator*

In der Vorlesung wurden die Eigenwerte $E_n$ und die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ des quantenmechanischen harmonischen Oszillators bestimmt. Diese sind durch

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \tag{4}$$

und

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}\ell}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x/\ell)^2} H_n(x/\ell) \tag{5}$$

gegeben. Dabei ist $\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ die charakteristische Länge des Oszillators und $H_n(y)$ sind die Hermite-Polynome. Die Hermite-Polynome sind durch

$$H_n(y) = (-1)^n \mathrm{e}^{y^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n} \mathrm{e}^{-y^2} \tag{6}$$

definiert und besitzen die erzeugende Funktion

$$\mathrm{e}^{-s^2+2ys} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(y), \quad s \in \mathbf{C}. \tag{7}$$

**Bemerkung:** Sie können in dieser Aufgabe gerne $\ell = 1$ setzen.

(a) Benutzen Sie die Definitionsgleichung (6), um die ersten fünf Hermite-Polynome zu berechnen. Zeichnen Sie außerdem die ersten fünf Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators.

(b) Zeigen Sie explizit, dass die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators ein vollständiges Funktionensystem bilden. D.h. zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_n(x') = \delta(x - x') \tag{8}$$

gilt. **Hinweis:** Benutzen Sie die obige Definitionsgleichung (6) für die Hermite-Polynome und stellen Sie darin eine der Gauß-Funktionen durch ihre Fourier-Transformierte dar.

(c) Die Eigenfunktionen bilden außerdem ein Orthonormalsystem, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x = \delta_{n,m}$. Benutzen Sie dies um zu zeigen, dass eine beliebige Funktion $f(x)$ durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x), \text{ mit } c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) f(x) \mathrm{d}x \tag{9}$$

dargestellt werden kann.

(d) Benutzen das Ergebnis aus Aufgabenteil (c), um zu zeigen, dass die Koeffizienten $c_n$ für ein Gauß'schen Anfangswert

$$f(x) = \psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\ell^2}} \tag{10}$$

durch

$$c_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \left(\frac{x_0}{\ell}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(x_0/\ell)^2} \tag{11}$$

gegeben sind.