Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Mathias Hayn, Judith Lehnert, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Alejandro Torres Orjuela

5. Übungsblatt – Quantenmechanik I

Abgabe: Mo. 26. Mai 2014 bis 10:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 10 (3+4=7 Punkte): *Kohärente Zustände à la Schrödinger*

In dieser Aufgabe sollen Sie den Zustand aus Aufgabe 9(d) des vierten Übungsblatts näher untersuchen. Dort haben Sie berechnet, dass sich die Wellenfunktion, dargestellt durch einen Gauß'schen Anfangswert $\psi(x,t=0) = \left(\sqrt{\pi}\ell\right)^{-1/2}\exp[-\frac{(x-x_0)^2}{2\ell^2}]$, durch die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ des harmonischen Oszillators mittels $\psi(x,t=0)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n(x)$ entwickeln lässt. Die hier auftretenden Koeffizienten sind dabei durch

$$c_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}}\left(x_0/\ell\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(x_0/\ell)^2} \tag{1}$$

gegeben. In dieser Aufgabe sollen Sie die Zeitentwicklung dieses Zustands betrachten.

(a) Berechnen Sie die Wellenfunktion $\psi(x,t)$, welche sich aus dem Anfangswert $\psi(x,t=0)$ unter der Dynamik des Hamilton-Operators des harmonischen Oszillators entwickelt. Bestimmen Sie daraus die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi(x,t)|^2$. Diskutieren Sie das Verhalten von $|\psi(x,t)|^2$. Inwiefern kann man von einem *klassischen* Zustand sprechen?

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Unschärfe des Ortes und des Impulses in diesem Zustand. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Bewegung eines klassischen Oszillators.
Hinweis: Die Unschärfe (oder Abweichung) ΔA einer Größe A ist durch die Wurzel der Varianz dieser Größe gegeben, d.h. $\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}$.

Aufgabe 11 (4+2+3+3=12 Punkte): *Doppel-δ-Potential*

Eine einfache Beschreibung für das Elektron im H_2^+-Ion ist durch folgendes Modellpotential gegeben:

$$V(x) = -\frac{e^2}{\pi\epsilon_0}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right], \tag{2}$$

wobei $a = const.$ der halbe Abstand der Wasserstoffkerne ist, e ist die Elementarladung und ϵ_0 ist die elektrische Feldkonstante. Die Lösung der Wellenfunktion für gebundene Zustände des Elektrons lautet:

$$\varphi(x) = A_\pm \begin{cases} e^{kx} & \text{für } -\infty < x \le -a \\ \frac{\pm e^{-ka}}{e^{ka}\pm e^{-ka}}\left(e^{kx}\pm e^{-kx}\right) & \text{für } -a < x < a \\ \pm e^{-kx} & \text{für } a \le x < \infty, \end{cases}$$

mit $A_\pm = \left(e^{ka}\pm e^{-ka}\right)\sqrt{k}\left(2\pm 2e^{-ka}\pm 4ake^{-2ka}\right)^{-1/2}$ und $k>0$. Beachten Sie, dass für gebundene Zustände $E<0$ gilt.

(a) Leiten Sie ausgehend von der Lösung der Wellenfunktion eine Bestimmungsgleichung für die Energie $E(a)$ des gebundenen Elektrons her. **Hinweis:** Betrachte dazu die Ableitung der Wellenfunktion an der Unstetigkeitsstelle.

(b) Zeigen Sie durch eine graphische Überlegung, dass zu jedem Kernabstand $2a$ genau eine *symmetrische* Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung mit Energie $E_+(a) < 0$ existiert.

(c) Zeigen Sie, dass es eine weitere *antisymmetrische* Lösung mit Energie $E_-(a) < 0$ gibt, wenn für den Kernabstand $2a > \pi\hbar\epsilon_0/(me^2)$ gilt.

(d) Skizzieren Sie die symmetrische und antisymmetrische Lösung sowie das Potential.