Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Mathias Hayn, Judith Lehnert, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Alejandro Torres

7. Übungsblatt – Quantenmechanik I

Abgabe: Di. 10. Juni 2014 bis 10:30 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 15 (3+2+2+2+3=12 Punkte): *Messungen in der Quantenmechanik*
Ein quantenmechanisches System, welches durch drei Energieniveaus beschrieben werden kann, besitze den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \varepsilon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

in Matrixform und sei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

präpariert. Hier ist $|\psi(t=0)\rangle$ in der Basis der Energieeigenzustände gegeben. Außerdem existiert eine Observable X, dessen Operator in der Basis der Energieeigenzustände folgende Matrixdarstellung hat:

$$\hat{X} = \ell \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(a) Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände (Vektoren) und Eigenwerte des Hamilton-Operators und des Operators $\hat{X}$.

(b) Welche Messwerte sind bei einer Messung der Energie bzw. der Observablen X zur Zeit $t = 0$ möglich und mit welcher Wahrscheinlichkeit treten diese Messwerte auf?

(c) Zur Zeit $t = 0$ soll zunächst die Energie gemessen werden und sofort danach die Observable X. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man erst den Messwert 0 für die Energie und danach $\sqrt{3}\,\ell$ für die Observable X?

(d) In einem identischen Experiment soll zur Zeit $t = 0$ zunächst die Observable X und sofort danach die Energie gemessen werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man erst den Messwert $\sqrt{3}\,\ell$ für die Observable X und danach 0 für die Energie? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat aus Aufgabenteil (c) und erklären Sie, warum die Reihenfolge der Messungen hier wichtig ist.

(e) Berechnen Sie $|\psi(t)\rangle$, den Erwartungswert der Energie und der Observablen X in diesem Zustand.

(f) (**2 Bonuspunkte**) Zum Zeitpunkt $t = t_1 > 0$ wird die Observable X mit dem Wert 0 gemessen. Berechnen Sie auch hier $|\psi(t > t_1)\rangle$, sowie den Erwartungswert der Energie und der Observablen X.

Aufgabe 16 (4 Punkte): *Ehrenfest-Theorem*
Zeigen Sie, dass die Erwartungswerte des Orts- und Impulsoperators die beiden Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\mathbf{r}}\rangle = \frac{\langle\hat{\mathbf{p}}\rangle}{m} \text{ und} \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\mathbf{p}}\rangle = \langle\hat{\mathbf{F}}\rangle \tag{5}$$

erfüllen. Dabei soll die Dynamik durch den allgemeinen Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}})$ beschrieben werden. Außerdem ist $\hat{\mathbf{F}}$ der Operator der Kraft, welcher im Ortsraum durch $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ gegeben ist.

Aufgabe 17 (2+2+2=6 Punkte): *Translationsoperator*
In dieser Aufabe untersuchen wir den Translationsoperator. Im Ortsraum hat dieser die Form $\exp[a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}]$ und erfüllt die Gleichung $\exp[a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}]\varphi(x) = \varphi(x+a)$. Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ und $\varphi(x)$ eine beliebige (Wellen-)Funktion.

(a) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{x}, \mathrm{e}^{ia\hat{p}/\hbar}]$.

(b) Zeigen Sie damit, dass $|\psi\rangle = \mathrm{e}^{ia\hat{p}/\hbar}|x'\rangle$ ein Eigenzustand des Ortsoperators $\hat{x}$ zum Eigenwert $x' - a$ ist. Hier ist $|x\rangle$ der Ortsket, d.h. $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$.

(c) Benutzen Sie dies, um schließlich die Relation $\exp[a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}]\varphi(x) = \varphi(x+a)$ von oben herzuleiten.

(d) (**3 Bonuspunkte**) Ohne nochmal die gesamte Herleitung zu wiederholen, überlegen Sie sich, was der Operator $\exp[ip_0\hat{x}/\hbar]$, mit $p_0 \in \mathbb{R}$, angewendet auf Impulseigenzustände $|p\rangle$ bewirkt. Berechnen Sie mithilfe dieser Überlegung den Impulserwartungswert des Zustands $|\psi\rangle = \exp[ip_0\hat{x}/\hbar]|\psi_0\rangle$, für den Fall, dass $|\psi_0\rangle$ ein „ruhendes“ Teilchen beschreibt, d.h. $\langle\psi_0|\hat{p}|\psi_0\rangle = 0$.