Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 04. Juni 2014

Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Mathias Hayn, Judith Lehnert, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Alejandro Torres

8. Übungsblatt – Quantenmechanik I

Abgabe: Mo. 16. Juni 2014 bis 10:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 18 (4+3+2=9 Punkte): *Rechnen mit Operatoren*

(a) Zeigen Sie, dass für die folgenden Kommutatoren gilt:

$$\text{(i)}\ \ [\hat{p}, \hat{T}] = 0 \qquad \text{(ii)}\ \ [\hat{F}, \hat{x}_k] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \hat{p}_k}\hat{F} \qquad \text{(iii)}\ \ [\hat{F}, \hat{p}_k] = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_k}\hat{F},$$

wobei $\hat{p}$ der Impulsoperator, $\hat{T}$ der Operator der kinetischen Energie, $\hat{F}$ ein beliebiger Operator und $\hat{p}_k$ und $\hat{x}_k$ Komponenten des Orts- und Impulsoperators sind. Verwenden Sie für (i) nur die Eigenschaften des Kommutators und die fundamentalen Kommutatorrelationen.

(b) Zeigen Sie, dass für hermitesche Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ auf einem Hilbert-Raum gilt:

$$\text{(i)}\ \ \left\langle \hat{A}\hat{A} \right\rangle \geq 0 \qquad \text{(ii)}\ \ (i\hat{A})^\dagger = -i\hat{A} \qquad \text{(iii)}\ \ \left\langle \hat{A}\hat{B} \right\rangle^* = \left\langle \hat{B}\hat{A} \right\rangle.$$

(c) Zeigen Sie, dass $e^{i\hat{A}}$ unitär ist, wenn $\hat{A}$ ein hermitescher Operator auf einem Hilbert-Raum ist.

Aufgabe 19 (1+3+4+5=13 Punkte): *Bewegungsgleichungen im Heisenberg-Bild*

Im Schrödinger-Bild sei ein Einteilchen-Hamiltonian in $d = 1$ Dimension gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}).$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für die fundamentalen Vertauschungsrelationen im Heisenberg-Bild $[\hat{x}_H(t), \hat{p}_H(t)] = i\hbar$ und $[\hat{x}_H(t), \hat{x}_H(t)] = [\hat{p}_H(t), \hat{p}_H(t)] = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator im Heisenbergbild durch

$$\hat{H}_H(t) = \frac{1}{2m}\hat{p}_H^2(t) + V(\hat{x}_H(t))$$

gegeben ist. Stellen Sie die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen für Orts- und Impulsoperator auf.

(c) Betrachten Sie den harmonischen Oszillator mit dem Potential $V(\hat{x}) = \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2$ und geben Sie die Differentialgleichung für $\hat{x}_H(t)$ an. Berechnen Sie mit Hilfe der Lösung den Kommutator $[\hat{x}_H(t_1), \hat{x}_H(t_2)]$. Es sei $\hat{p}_H(t = 0) = \hat{p}$ und $\hat{x}_H(t = 0) = \hat{x}$ ($\hat{p}$ und $\hat{x}$ sind Operatoren im Schrödinger-Bild). Interpretieren Sie das Ergebnis.

(d) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\hat{x}_H(t_1)\hat{x}_H(t_2 = 0)$ — eine sogenannten Zweipunktkorrelationsfunktion — im Eigenzustand des Hamilton-Operators mit der niedrigsten Energie. Interpretieren Sie das Ergebnis.