Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Mathias Hayn, Judith Lehnert, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Alejandro Torres

10. Übungsblatt – Quantenmechanik I

Abgabe: Mo. 30. Juni 2014 bis 10:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 24 (2.5+1.5+1.5+3+2.5=11 Punkte): *Wasserstoffatom*
Eine normierte Wellenfunktion ist gegeben durch

$$\Psi(r,\theta,\phi) = \frac{a_0^{-3/2}}{\sqrt{\pi}} \exp(-r/a_0) \; .$$

(a) Zeigen Sie durch Einsetzen in die zeitunabhängige Schrödingergleichung, dass $\Psi(r,\theta,\phi)$ eine Wellenfunktion des Wasserstoffatoms mit dem Coulomb-Potential $V(r) = -e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$ ist. Geben Sie den Energieeigenwert und die Quantenzahlen des Zustandes an.
Hinweis: Der *Bohrsche Radius* $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(m_e e^2)$ ist ein typisches atomares Längenmaß. Eine entsprechende charakteristische Energieeinheit ist die *Rydberg-Energie* $E_R = \hbar^2/(2m_e a_0^2)$.

(b) Berechnen Sie den mittleren Abstand des Elektrons vom Kern.
Hinweis: Hier ist der Erwartungswert von r zu berechnen.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Elektron innerhalb des Kerns zu finden (Kernradius ca. 10^{-15}m)?

(d) Plotten Sie nun mit einem Programm ihrer Wahl die radiale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\rho(r) = \int d\Omega \, r^2 |\Psi_{n\,l\,m}(\mathbf{r})|^2$ für

  (i) die Zustände $l = 0$ mit $n = 1, 2, 3, 4$,
  (ii) die Zustände $n = 4$ mit $l = 0, 1, 2, 3$.

Hinweis: Verwenden Sie als Längenskala den *Bohrschen Radius* und beachten Sie, wenn sie Mathematica zum Plotten verwenden, dass die Laguerre-Polynome in Mathematica nicht die übliche Normierung haben.

(e) Visualisieren Sie das Betragsquadrat der Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta,\phi)$ (z.B. in Mathematica mit dem Kommando `SphericalPlot3D`) für $l = 1$ mit $m = -1, 0, 1$ sowie für $l = 2$ mit $m = 0, 1, 2$. Interpretieren Sie das Ergebnis?

Aufgabe 25 (2+3=5 Punkte): *Virialsatz*

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Coulomb-Potentials im Grundzustand des Wasserstoffatoms und zeigen Sie dass $\langle V \rangle = 2E_1$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie im Grundzustand des Wasserstoffatoms und bestätigen Sie die Gültigkeit des Analogons zum Virialsatz der klassischen Mechanik:

$$\langle T \rangle = -1/2 \langle V \rangle \; .$$

Aufgabe 26 (3+3+3=9 Punkte): *Zusammenhang zwischen Drehimpuls-Algebra und Drehungen*

Gegeben sei die Drehimpuls-Algebra

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} L_k, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Algebra von den drei 3×3–Matrizen L_i, deren Matrixelemente $(L_i)_{ab}$ gegeben sind durch

$$(L_i)_{ab} = -\epsilon_{iab}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2}$$

erfüllt wird (dies ist nur eine mögliche sogenannte Darstellung der Drehimpuls-Algebra). Hier bezeichnet ϵ_{klm} den total antisymmetrischen ϵ-Tensor (Levi-Civita-Symbol) mit $\epsilon_{123} = 1$.

(b) Die Matrizen L_i aus Aufgabenteil (a) bilden die sogenannten Generatoren der speziellen orthogonalen Gruppe (Drehgruppe) in 3D Zeigen Sie, dass

$$\exp[\alpha L_3] = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

wobei die Exponentialfunktion der Matrix L_3 auf der linken Seite über ihre Taylorreihe definiert ist.

(c) Zeigen Sie, dass sich die Generatoren aus Aufgabenteil (a) auch durch

$$L_i = \frac{d}{d\alpha} D_i(\alpha)\big|_{\alpha=0}$$

ergeben. Hierbei bezeichnet das $D_i(\alpha)$ die Drehmatrix für eine Drehung um den Winkel α um die i-te Achse. Wie lässt sich eine allgemeine Drehung mit Hilfe der L_i darstellen?