Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 5. Mai 2014
http://www.tu-berlin.de/?145990

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

3. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 07.05.2014 zu Beginn der Übung

S Aufgabe 7 (7 Punkte): *Kontinuitätsgleichungen*

In der Vorlesung wurden die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie mechanischer Systeme hergeleitet. Damit lassen sich auch Kontinuitätsgleichungen weiterer Erhaltungsgrößen herleiten.

1. Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen ohne Materie die Kontinuitätsgleichung der Ladungsdichte her.
   Benutzen Sie nun das Vorgehen der Vorlesung für eine alternative Herleitung.

2. Die Energiedichte des freien elektromagnetischen Feldes lautet $\mathrm{u} = \frac{\epsilon_0}{2}\,\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\,\mathbf{B}^2$.
   Wie lauten die dazugehörigen Bilanzgleichungen, die Sie mit Hilfe der homogenen Maxwell-Gleichungen bzw. mit dem Vorgehen der Vorlesung gewinnen? Zeigen Sie die Äquivalenz beider Gleichungen, indem Sie explizit ebene elektromagnetische Wellen annehmen.

3. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung der Quantenmechanik und welche Erhaltungsgröße spielt hierbei eine Rolle?

4. Wie sieht die lokale Bilanzgleichung für die mechanische Impulsdichte $p = \rho\,\mathbf{v}$ aus? Interpretieren Sie die dabei auftretenden Terme.

M Aufgabe 8: *Normal- und Schubspannung*

Gegeben ist der Spannungstensor

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 5yz & 3y^2 & 0 \\ 3y^2 & 0 & -x \\ 0 & -x & 0 \end{pmatrix} ,$$

in kartesischen Koordinaten.

(a) Berechnen Sie den Kraftvektor $\mathbf{t}$ und die Normalspannung σ im Punkt $\mathbf{p} = (1/2, \sqrt{3}/2, -1)$ auf der Fläche F, für die gilt $x^2 + y^2 + z = 0$.

(b) Berechnen Sie den Schubspannungsvektor τ im Punkt $\mathbf{p}$ auf der Fläche F.

S Aufgabe 9 (3 Punkte): *Transformation des Spannungstensors*

Gegeben seien der Spannungstensor $\mathbf{T}$, der Normalenvektor $\mathbf{n}$ und der Schubspannungsvektor τ:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} , \; \mathbf{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \; \tau = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 20 \\ -2 \\ -44 \end{pmatrix} ,$$

in kartesischen Koordinaten. Berechnen Sie den Spannungstensor $\mathbf{T}'$ im Koordinatensystem $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ mit:

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}'_2 = \frac{\tau}{|\tau|}, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2 \; .$$

M **Aufgabe 10**: *Poinsot'sche Konstruktion*

In der klassischen Mechanik ist die Poinsot'sche Konstruktion eine geometrische Methode zur Visualisierung der Drehmoment-freien Bewegung eines starren Körpers. In dieser Aufgabe soll die Poinsot'sche Konstruktion zur Visualierung des Spannungstensors $\mathbf{T}$ verwendet werden.

(a) Welche Fläche wird durch

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{T}\mathbf{x} = \mathrm{const}$$

beschrieben? Geben Sie die Gleichung der Fläche als Funktion der Komponenten von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{T}$ an. Diagonalisieren Sie $\mathbf{T}$ und geben Sie die Gleichung der Fläche in dem gedrehten Koordinatensystem, d.h. in dem Koordinatensystem in dem die Hauptachsen die Basisvektoren bilden, an. Fertigen Sie eine Skizze der Fläche an.

(b) Zeigen Sie, dass der Kraftvektor $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ am Ort $\mathbf{x}$ senkrecht auf der Fläche $\mathbf{x} \cdot \mathbf{T}\mathbf{x} = \mathrm{const}$ steht.