Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

6. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 28.05.2014 zu Beginn der Übung

M Aufgabe 18: *Oseen Tensor I*

Wir definieren die Fouriertransformation und Rücktransformation wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\} &= \hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \ , \\ \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} &= f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \ ,\end{aligned}$$

mit den Relationen

$$\mathcal{F}\{\nabla f\} = i\mathbf{k}\hat{f}(\mathbf{k}) \ , \quad \text{sowie} \quad \mathcal{F}\{\delta(\mathbf{r})\} = 1 \ .$$

(a) Gegeben sei die Poissongleichung und die biharmonische Gleichung sowie deren Fundamentallösungen:

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \quad &\text{mit Lösung} \quad \phi = \frac{1}{4\pi r} \ , \\ \nabla^4\psi(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \quad &\text{mit Lösung} \quad \psi = \frac{r}{8\pi} \ .\end{aligned} \tag{4.9}$$

Zeigen Sie, dass:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi r} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \ , \\ \nabla\otimes\nabla\left(\frac{r}{8\pi}\right) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}}{k^4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \ .\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie die Divergenz der Stokesgleichung (4.1) mit $\rho\mathbf{b} = \mathbf{f}_0\delta(\mathbf{r})$, $\mathbf{f}_0 = \text{const.}$. Fouriertransformieren Sie die resultierende Gleichung und bestimmen Sie $\hat{p}(\mathbf{k})$. Fouriertransformieren Sie anschließend die Stokesgleichung (4.1), eliminieren Sie $\hat{p}(\mathbf{k})$ und zeigen Sie, dass

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\eta k^2}\left(\mathbf{f}_0 - \mathbf{k}\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_0}{k^2}\right) \ .$$

S Aufgabe 19 (2 Punkte): *Oseen Tensor II*

Setzen Sie $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k})$ in die Formel der Rücktransformation ein und vergleichen Sie die auftretenden Terme mit den Ausdrücken aus 18 (a), die Sie skalar mit $\mathbf{f}_0$ multiplizieren. Zeigen Sie, dass für den Oseen-Tensor $\mathbf{O}(\mathbf{r})$ gilt:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{O}(\mathbf{r})\mathbf{f}_0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{O}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\eta r}\cdot\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}}{r^2}\right) \ . \tag{4.15}$$

S **Aufgabe 20 (8 Punkte):** *Stokes Reibungsgesetz*
Wir suchen das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, das um eine Kugel mit Radius R entsteht, wenn sie bei kleiner Reynoldszahl mit der Geschwindigkeit U von einer Flüssigkeit mit der Viskosität η angeströmt wird. Das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sei axialsymmetrisch mit

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_r(r,\theta)\mathbf{e}_r + v_\theta(r,\theta)\mathbf{e}_\theta$$

wobei die Achse mit $\theta = 0$ die Symmetrieachse darstellt. Die Randbedingungen lauten

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \to -U\mathbf{e}_z\ , \quad r \to \infty \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0\ , \quad r = R\ .$$

(a) Die Strömungsfunktion $\Psi(r,\theta)$ für axialsymmetrische Kugelkoordinaten ist definiert (analog zu Aufgabe 13, Blatt 4) über $\mathbf{v} = \nabla \times \left(\frac{\Psi(r,\theta)}{r\,\sin\theta}\mathbf{e}_\phi\right)$. Zeigen Sie folgenden Zusammenhang zwischen Ψ und $\mathbf{v}$:

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\ , \quad \text{sowie} \quad v_\theta = \frac{-1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\ .$$

(b) Berechnen Sie die Vortizität $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ und $\nabla^2\boldsymbol{\omega}$ und finden Sie mit Hilfe der Stokes Gleichung eine Differentialgleichung für Ψ.

(c) Formulieren Sie die Randbedingungen um in Bedingungen für Ψ und lösen Sie die Differentialgleichung mit dem Ansatz $\Psi = f(r)\,\sin^2\theta$. Zeigen Sie, dass:

$$v_r = -U\cos\theta\left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right)\ , \quad \text{sowie} \quad v_\theta = U\sin\theta\left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right)\ .$$

(d) Berechnen Sie den Druck $p(\mathbf{r})$ aus den Stokes Gleichungen und dem Geschwindigkeitsfeld. Verwenden Sie die Randbedingung $p(\mathbf{r}) \to 0$ für $\mathbf{r} \to \infty$.

(e) Berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{A}$ aus dem Geschwindigkeitsfeld.

(f) Berechnen Sie den Kraftvektor

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}\mathbf{n} = -p\mathbf{n} + 2\eta\mathbf{A}\mathbf{n}\ , \qquad (3.19), (3.41), (3.56)$$

auf der Oberfläche der Kugel $r = R$ und zeigen Sie, dass für die Gesamtkraft F gilt:

$$F = 6\pi\eta R U\ . \qquad (4.22)$$