Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

# 11. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

**Abgabe: Mi. 09.07.2014 bis 14:15 Uhr im EW 229 (Übungen)**
*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.*

**Aufgabe 27 (10 Punkte):** *1d-Ising-Modell*

Das Ising-Modell liefert eine idealisierte Beschreibung eines Ferromagneten. Für jeden Gitterpunkt $i$ ist eine Variable $s_i$ definiert, die die beiden Werte $s_i = \pm 1$ annehmen kann. Ferner wird eine Wechselwirkung zwischen den Gitterpunken $i$ und $j$ eingeführt. Ein solches System mit einem äußeren Magnetfeld hat die Hamilton-Funktion

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - \mu B_0 \sum_i s_i.$$

Die magnetische Induktion $\mathbf{B_0} = (0, 0, B_0)$ definiert die z-Richtung, relativ zu der sich die Momente parallel oder antiparallel ausrichten.
Betrachten Sie ein eindimensionales Ising-Modell, bei der sich eine Wechselwirkung nur auf die unmittelbar benachbarten Spins beschränkt, so dass sich eine Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \sum_{s_1,\dots s_N = \pm 1} \exp\left( \sum_{i=1}^{N} (h s_i + K s_i s_{i+1}) \right)$$

ergibt. Hierbei ist $h = \beta \mu B_0$ und $K = \beta J$. Es werden periodische Randbedingungen angenommen, d.h. $s_{N+1} = s_1$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{Z}$ die folgende Bedingung erfüllt $\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\left\{T^N\right\}$, wenn die Matrix $T$ gegeben ist durch

   $$T = \begin{pmatrix} e^{h+K} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{-h+K} \end{pmatrix}.$$

   Hinweis:
   Das Argument der Exponentialfunktion läßt sich schreiben als $h(s_i + s_{i+1})/2 + K s_i s_{i+1}$

2. Zeigen Sie dass $\mathcal{Z}$ geschrieben werden kann als

   $$\mathcal{Z} = \lambda_+^N + \lambda_-^N,$$

   wobei $\lambda_+ > \lambda_-$ die Eigenwerte der Matrix $T$ sind.

3. Berechenen Sie diese Eigenwerte und zeigen Sie, dass im thermodynamischen Limes $N \to \infty$

   $$\frac{\ln \mathcal{Z}}{N} = \ln \lambda_+ = K + \ln\left( \cosh(h) + (\sinh^2(h) + e^{-4K})^{\frac{1}{2}} \right)$$

   gilt. Diese Methode zur Bestimmung der Zustandssumme heißt Transfer-Matrix methode.

4. Bestimmen Sie die mittlere Magnetisierung und zeigen Sie, dass die Magnetisierung für $h \to 0^+$ verschwindet.

**Bitte Rückseite beachten!**$\longrightarrow$

11. Übung TFP SS14

**Aufgabe 28 (10 Punkte):** *Spin waves in a ferromagnet*
The quantum Heisenberg ferromagnet is specified by the Hamiltonian

$$H = -J \sum_{<n,m>} \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_m \tag{1}$$

with $J > 0$. We consider here a one-dimensional system with periodic boundary conditions.

1. The Holstein-Primakoff representation of the angular-momentum algebra reads

$$S_m^z = b_m^\dagger b_m - S; \quad S_m^+ = b_m^\dagger \sqrt{2S - b_m^\dagger b_m}; \quad S_m^- = \sqrt{2S - b_m^\dagger b_m}\, b_m,$$

   where $b_m$ and $b_M^\dagger$ are bosonic annihilation/creation operators: $\left[b_n, b_m^\dagger\right] = \delta_{nm}$. Show that the Holstein-Primakoff forms satisfy the appropriate spin commutation relations.

2. Rewrite the Hamiltonian of Eq. (1) in terms of these bosonic operators and show that, in the large spin limit $S \gg 1$, $H$ can be approximated as

$$H = -J \sum_m \left[ S^2 - 2S b_m^\dagger b_m + S(b_m^\dagger b_{m+1} + b_{m+1}^\dagger b_m) + \mathrm{O}(S^0) \right].$$

3. Through the introduction of the Fourier representation of the creation and annihilation operators, diagonalise this approximate Hamiltonian and determine the dispersion relation of the excitations (spin waves).

**Aufgabe 29 (10 Punkte): BONUS:** *Spin waves in an antiferromagnet*
The Heisenberg antiferromagnet Hamiltonian reads

$$H = +J \sum_{<n,m>} \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_m, \tag{2}$$

with $J > 0$. The ground state is the Neél state which, in 1D, is a chain of spins with alternating directions.

1. Perform a canonical transformation that rotates the odd-numbered spins by $\pi$ around the $x$-axis.

2. As above, use the Holstein-Primakoff representation to obtain an effective bosonic Hamiltonian valid in the large spin limit.

3. Diagonalise this Hamiltonian and find the dispersion of spin-waves in a Heisenberg antiferromagnet. Hint: You will need not only a Fourier transform, but also a Bogolioubov one (cf. theory of superconductors)!